«О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ»

основан на статье Белоцерковского Д.Л. «Об экстремальных двусвязных графах с фиксированным диаметром»

ДОКЛАД БЕЛОЦЕРКОВСКОГО Д.Л.

Дизайн: Запорощенко А.Р.

ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ!
ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ!
ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ!
ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ!

О журнале «Дискретный анализ и исследование операций»

Журнал "Дискретный анализ и исследование операций" основан в 1994 г. Учредители — Сибирское отделение РАН, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. С 1997 по 2007 гг. журнал издавался в двух сериях

В журнале публикуются оригинальные научные статьи и обзоры теоретической и прикладной направленности по следующим разделам дискретного анализа, исследования операций и информатики:

- дискретная оптимизация
- дискретные структуры и экстремальные задачи
- комбинаторика
- контроль и надежность дискретных устройств
- моделирование процессов управления
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и ее приложения
- теория кодирования
- теория функциональных систем

Наукометрические параметры журнала

MathSciNet:
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/serials/profile?journalId=6705

Web of Science: Индексируется в RUSSIAN SCIENCE CITATION INDEX

Scopus:
http://www.scopus.com/source/sourceInfo.url?sourceId=6600153110

Scopus CiteScore: Industrial and Manufacturing Engineering: Q3 (1.000 28% #288/402) (2024)
Applied Mathematics: Q4 (1.000 22% #519/665) (2024)

ScimagoJR: Applied Mathematics: Q3 (0.315) (2024)
Industrial and Manufacturing Engineering: Q3 (0.315) (2024)

Уровень в Белом списке: 2 (2025)

***eLibrary.Ru*:** http://elibrary.ru/title_about.asp?id=25528

Англ. версия: Journal of Applied and Industrial Mathematics

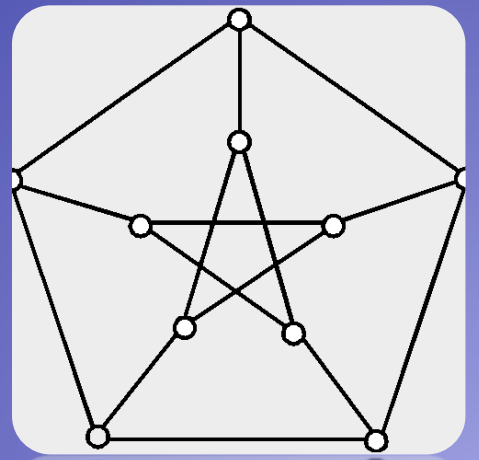
ССЫЛКА!

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую благодарность профессору кафедры высшей математики Ханукаевой Д.Ю., сделавшей несколько важных замечаний и рекомендаций, улучшивших текст статьи, а также профессору Филиппову А.Н., оказавшему большую моральную поддержку автору в процессе её создания.

Что такое графы и какие их особенности нам интересны? Базовые понятия.

Создание структуры, где вершины (точки) соединены линиями (ребрами). Точками могут быть города, пункты связи и т.д. Ребрами дороги или любые другие коммуникации. Пример графа:



Далее исследуется различные особенности полученной структуры.

Например: 1) самое длинное кратчайшее расстояние между любой парой вершин (*это понятие диаметра, на рисунке он равен 2*),

2) *понятие связности*. Это значит, что между любыми двумя вершинами имеется путь из ребер (маршрут, цепь, простая цепь),

3) понятие двусвязности. Проще говоря, между любой парой вершин есть хотя бы два непересекающихся пути с концами в этих вершинах. Граф на рисунке трехсвязен.

4) *понятие степени* вершины. Это число ребёр, присоединённых к вершине графа. Вершины обычно обозначаются буквой *v* , а степень вершины *deg(v)*

ГРАФЫ

Задача о 7 кенигсбергских мостах (1736)

Задача о семи кёнигсбергских мостах — классическая математическая задача, поставленная *Леонардом Эйлером*, которая спрашивает, можно ли пройти по всем семи мостам города через реку Прегель, не проходя ни по одному из них дважды. Эйлер доказал, что это невозможно, разработав новый раздел математики — *теорию графов*.

Решение же основано на том, что для прохождения по всем мостам (рёбрам графа) без повторений необходимо, чтобы количество "суш" (вершин), имеющих нечётное количество мостов, было либо равно нулю, либо двум. В исходной задаче таких «суш» было четыре, и все они имели нечётную степень (1, 3, 3, 5), поэтому пройти по всем мостам ровно один раз было невозможно.

ГРАФЫ

Почему важны именно эти характеристики графа? История проблемы

С конца 60-ых- начала 70-ых стали появляться компьютерные сети, которые легко представлялись в виде графа (вершины - точки расположения компьютеров или узлов сети, ребра – линии связи между ними). Такая сеть, представленная графом, должна быть быстродействующей и надёжной…

- Быстродействие - при передаче сообщения между двумя компьютерами число транзитных точек должно быть ограничено, т.е. длина кратчайшего маршрута между любыми двумя вершинами не может превосходить некоторого значения d.
- Надежность же подразумевает, что в случае выхода из строя компьютера или линии связи, сеть оставалась работоспособной и любые два узла могли обмениваться информацией. Это означает, что граф будет двусвязен.

- Экстремальные графы – с минимальным числом ребер

Постановка задачи

Каково минимальное число ребер в двусвязном графе с n вершинами и диаметром не превосходящим d?
На каких графах это минимальное число ребер достигается?

Обозначим $\Im(n,d)$ множество двусвязных графов с n вершинами и диаметром, не превосходящим d, а $f(n,d)$ минимальное число ребер в графах из $\Im(n,d)$.

Теорема 1: При $d \geq 2, n \geq 5$ выполнено: $$f(n,d) = \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d-1} \right\rceil$$

Графы из $\Im(n,d)$ с числом ребер, на которых достигается значение $f(n,d)$ будут экстремальными.

Теоремы, где описываются все такие графы, нет до сих пор.

История проблемы и основные публикации

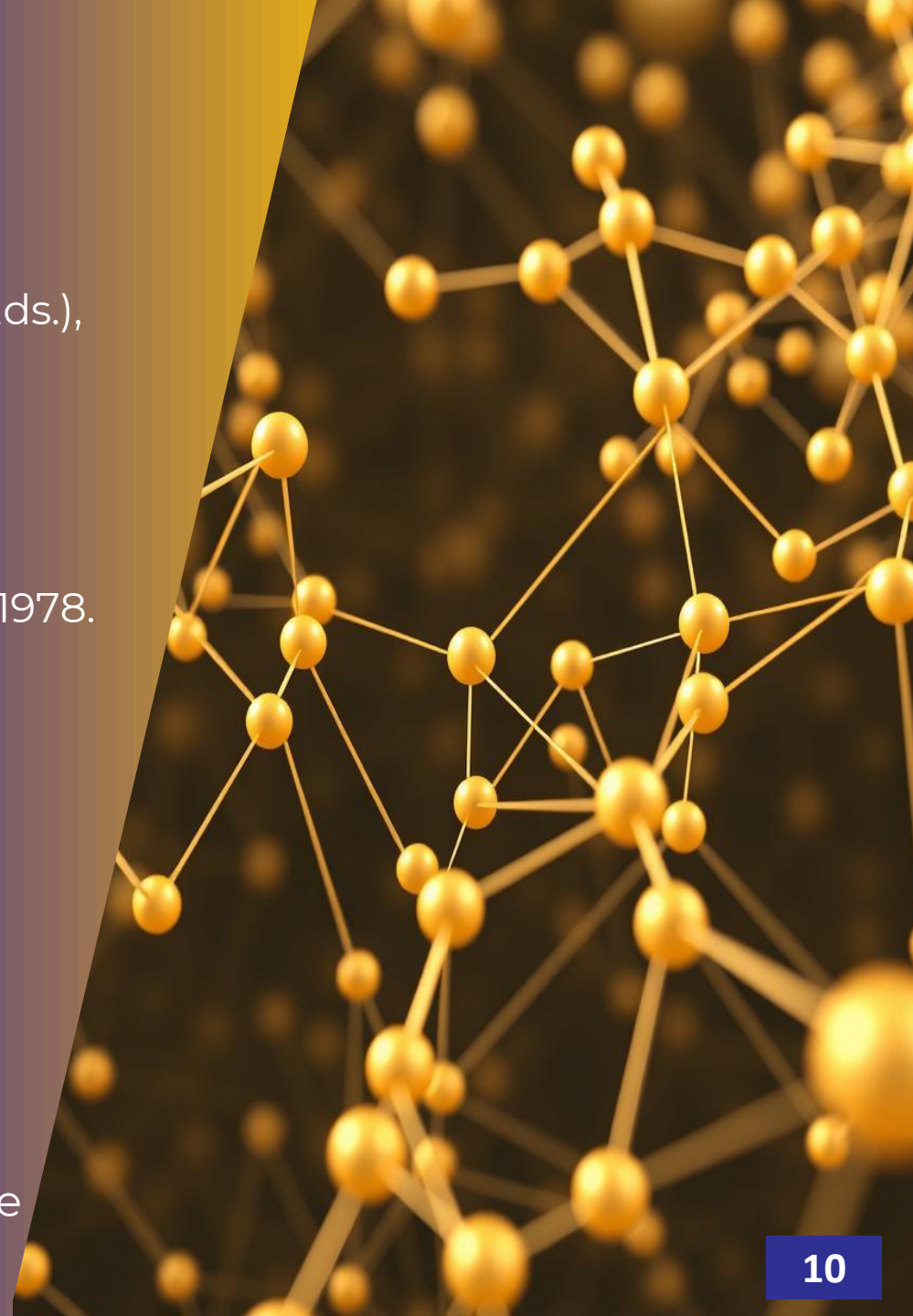
1. Bollobás B. Strongly 2-connected graphs // F. Hoffman et al. (Eds.), Congressus Numerantium XVII, Proceedings of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Baton Rouge, LA, Utilitas Mathematics, Winnipeg, Manitoba, Canada, 1976, P. 161–170.

2. Bollobás B. Extremal Graph Theory, Academic Press, London, 1978. 488 p.

3. Belotserkovsky D. The smallest number of edges in a 2-connected graph with specified diameter // Discrete Mathematics. 2007. T. 307. № 19-20. P. 2376-2384.

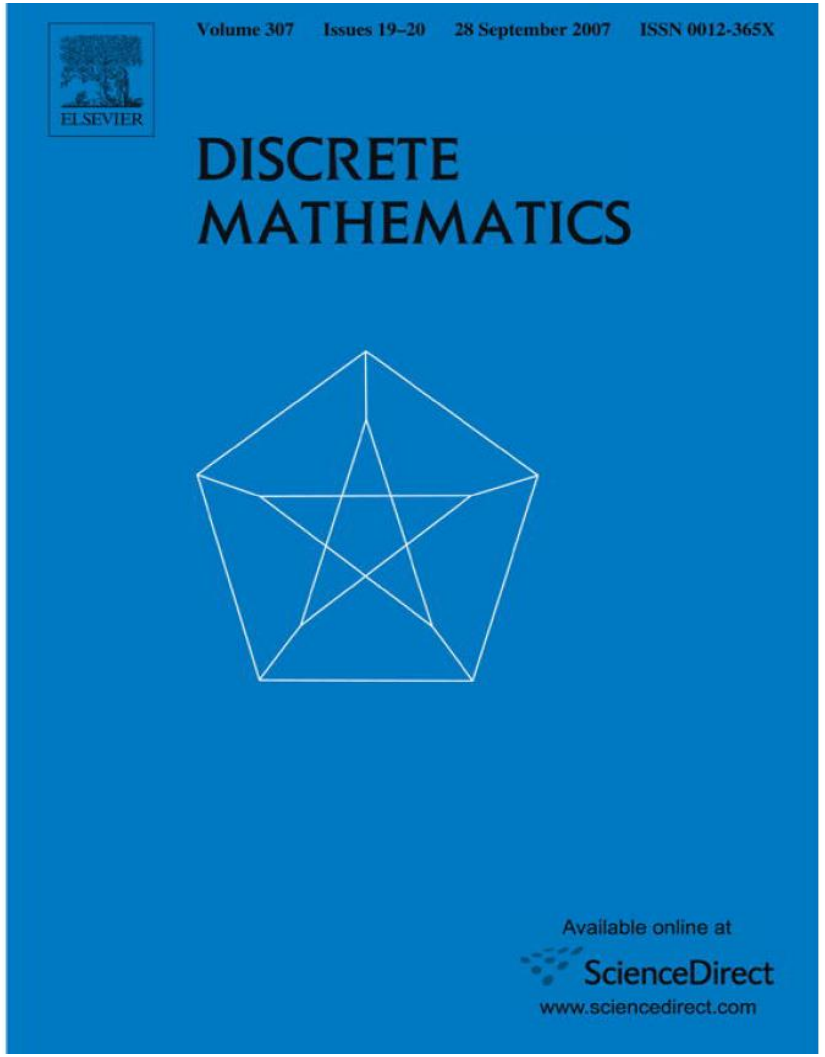
4. Jarry A., Laugier A. On the minimum number of edges of two-connected graphs with given diameter // Discrete Mathematics. 2012. T. 312. P. 757–762.

5. Белоцерковский Д.Л. Об экстремальных графах с фиксированным диаметром (готовится к печати в журнале «Дискретный анализ и исследование операций»)



Журнал «DISCRETE MATHEMATICS» (информация с сайта Российского центра научной информации)

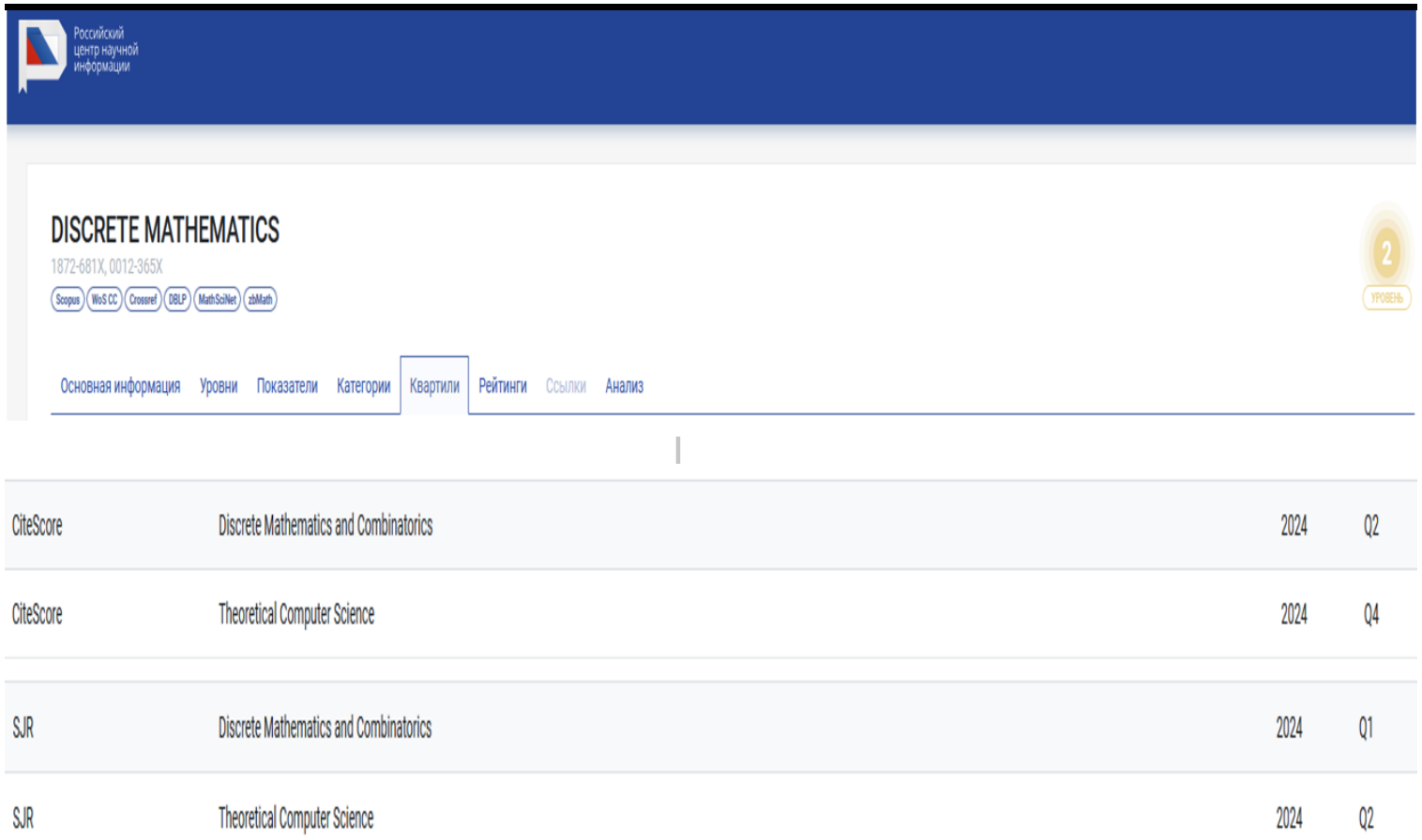
2025



2025

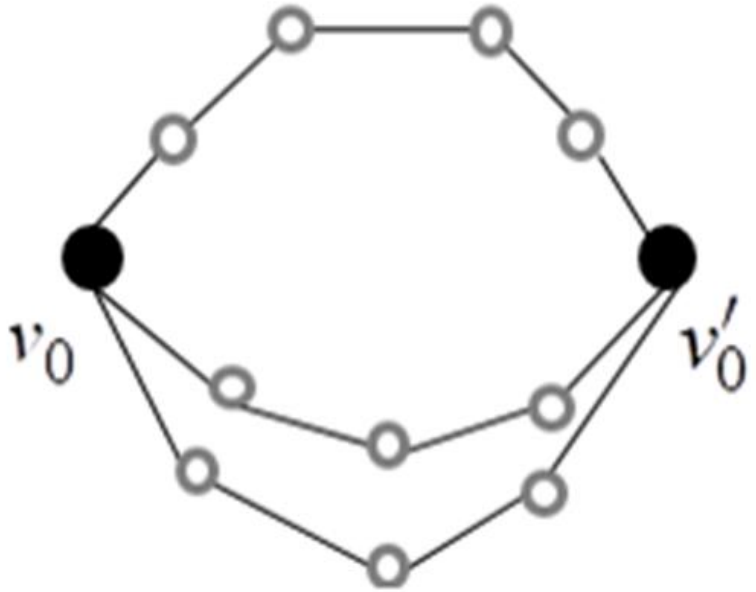
Журнал «DISCRETE MATHEMATICS» (информация с сайта Российского центра научной информации)

2025



2025

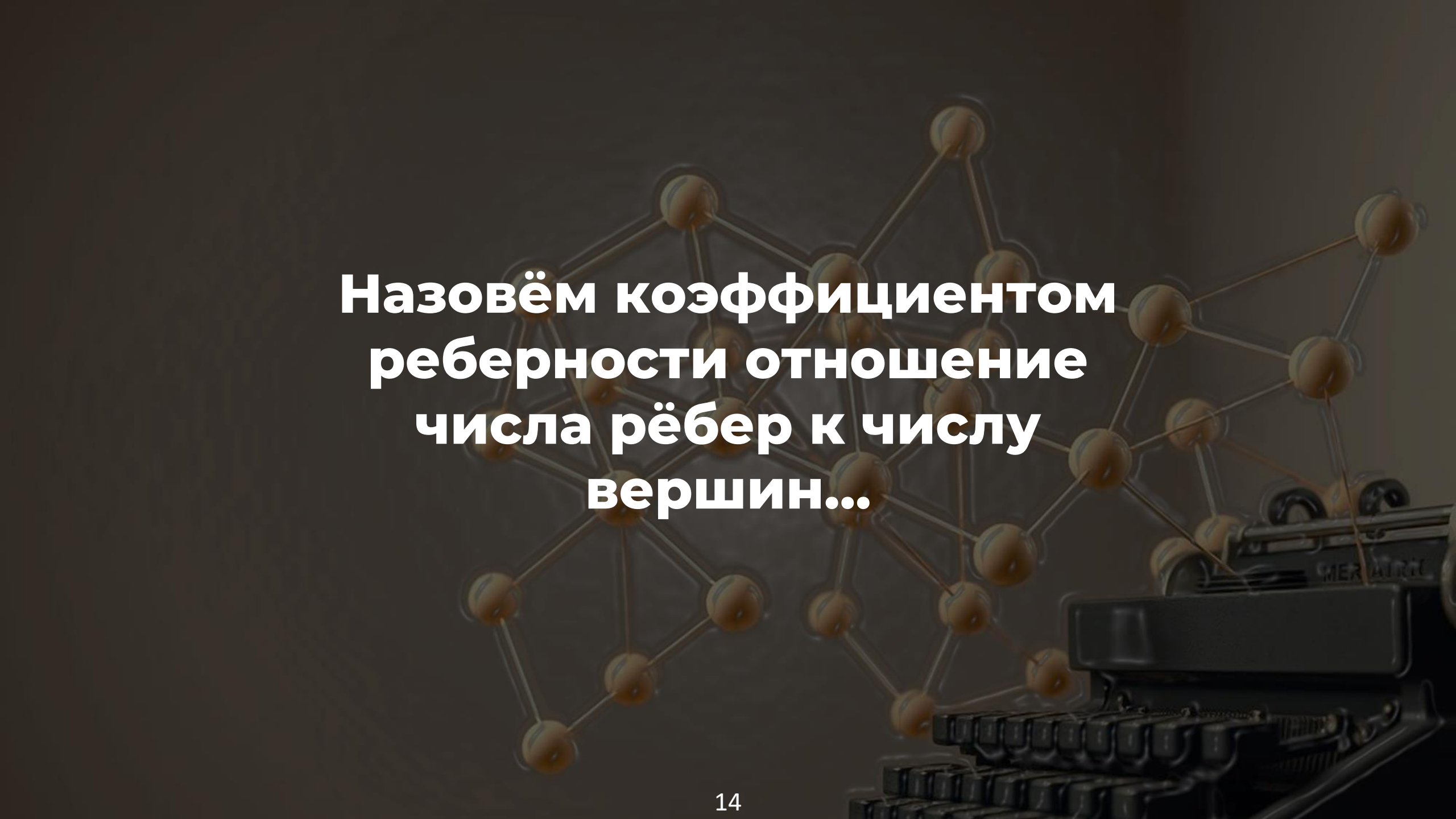
Экстремальные графы. Как они выглядят?



Пример экстремального графа из $\mathfrak{I}(12,4)$
(Боллобас, 1976) Ложье и Жари (2010, ?????)

Почему так сложно искать все экстремальные графы?

Вопрос



Назовём коэффициентом реберности отношение числа рёбер к числу вершин...

Предельные графы – «самые» экстремальные из экстремальных, так как имеют минимальное значение коэффициента рёберности.

Решает это проблему?
Да!

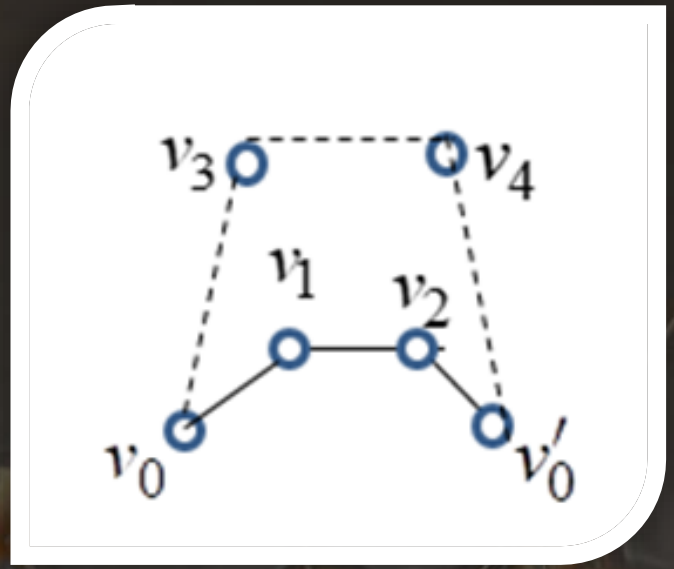
Рассмотрим значение $f(n,d)$ для случая d=4. Составим таблицу числа ребер, равных

$$f(n,d)=\left\lceil\frac{4n-9}{3}\right\rceil$$

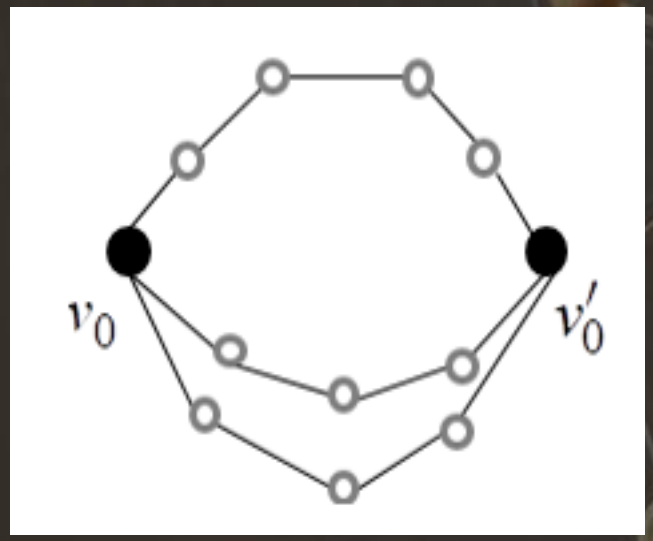
И коэффициента реберности для $12 \le n \le 16$

n	12	13	14	15	16
Число рёбер	13	15	16	17	19
Коэффициент рёберности	13/12≈1,083	15/13≈1,154	16/14≈1,143	17/15≈1,133	19/16≈1,188

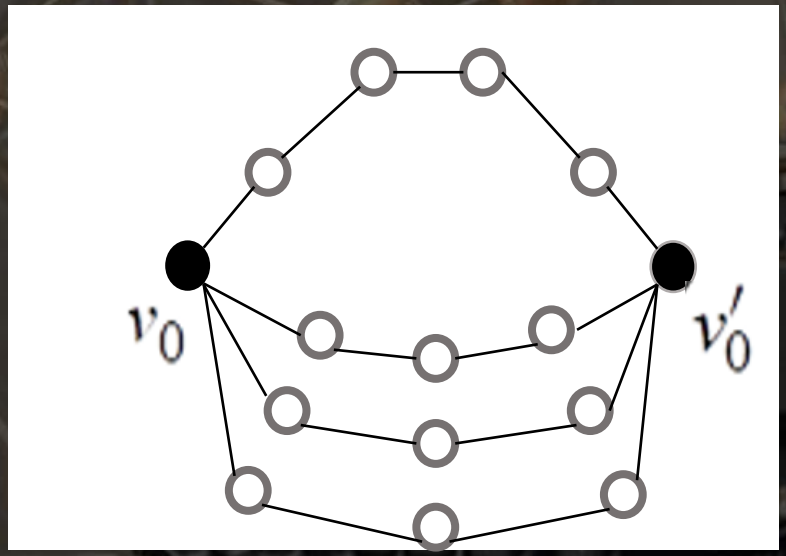
Заметим , что при $n = 13, 14, 15$ каждый последующий граф имеет на одно ребро больше, чем предыдущий. Последовательность таких графов будем называть серией. Предельный граф в серии при $n = 15$.



Эта операция позволяет получить новые предельные графы:



Предельный граф с 12 вершинами



Предельный граф с 15 вершинами

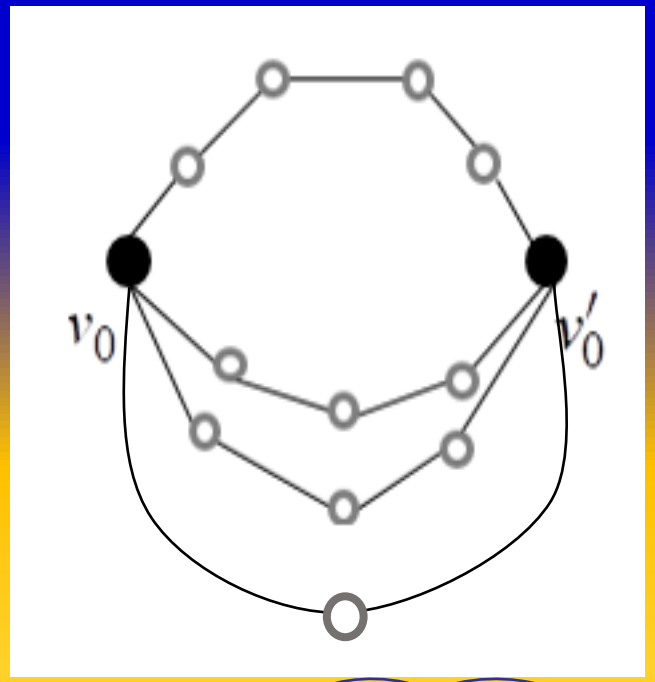
Цикл в графе **— это путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, не проходя по одному и тому же ребру дважды.**

Простая цепь в графе **— это маршрут, в котором все вершины и рёбра (кроме первой и последней, которые могут совпадать в случае замкнутой цепи) используются только один раз. Далее для простоты будем говорить цепь.**

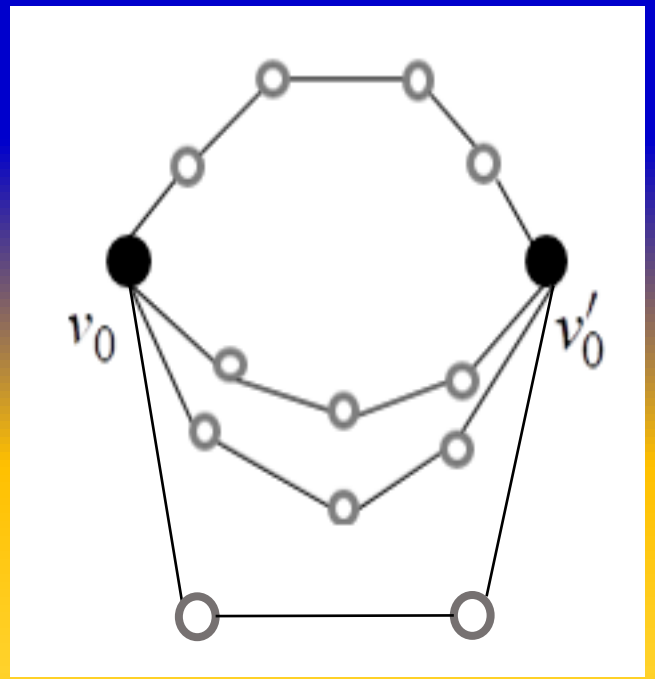
Назовем *l-нитью* цепь, состоящую из l ребер, все внутренние вершины которой имеют степень 2.

Пусть имеется *l-нить*. Назовём дублированием добавление к тем же концам *l-нити* ещё одной нити.

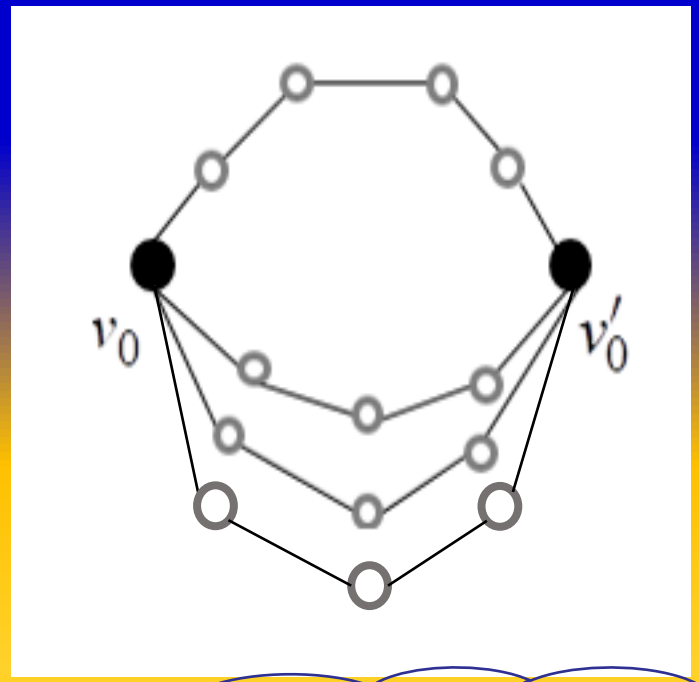
Серия графов из $\mathfrak{I}(n,4)$при $13 \leq n \leq 15$, полученных с помощью операции удлинения



Непредельный граф при $n = 13$



Непредельный граф при $n = 14$



Предельный граф при $n = 15$

Операции удлинения и дублирования генерируют экстремальные графы из $\mathfrak{I}(n,4)$

ТЕОРЕМА 2

ТЕОРЕМА 2
ТЕОРЕМА 2

Множество предельных графов из $\Im(n,d)$, $d \geq 2, n \geq 5$ состоит из цикла с 2d+1 вершиной графов, полученных из него дублированием либо одной и той же d-нити (см рис 1), либо двух разных d-нитей с одним общим концом v_0 (см рис 2)

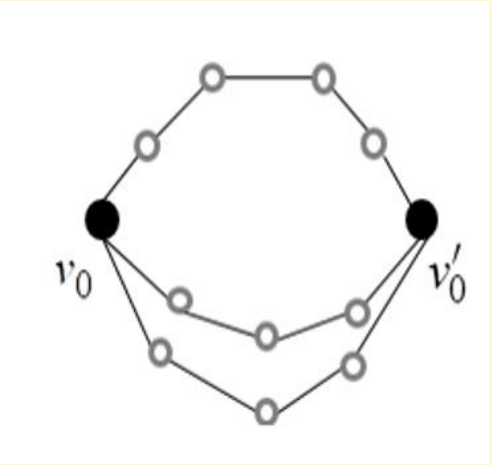


Рис.1

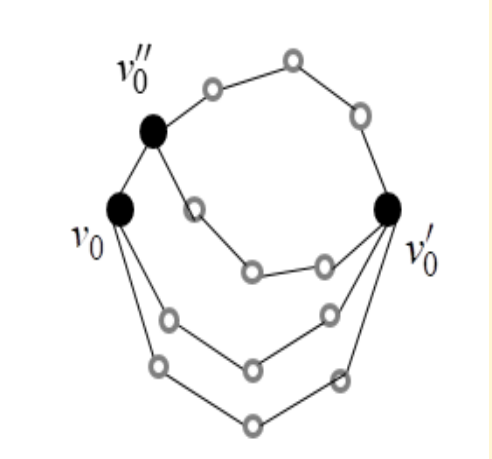
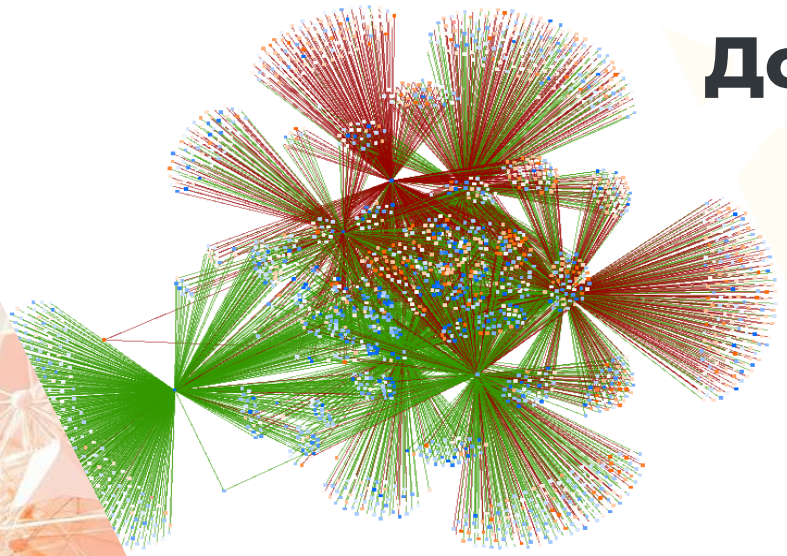


Рис.2

Вопрос: мы получили предельные графы, НО они имеются не для всех значений n. Как быть с остальными?



Доказательства в теории графов

Первая теорема теории графов (Эйлер, 1736):

Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.

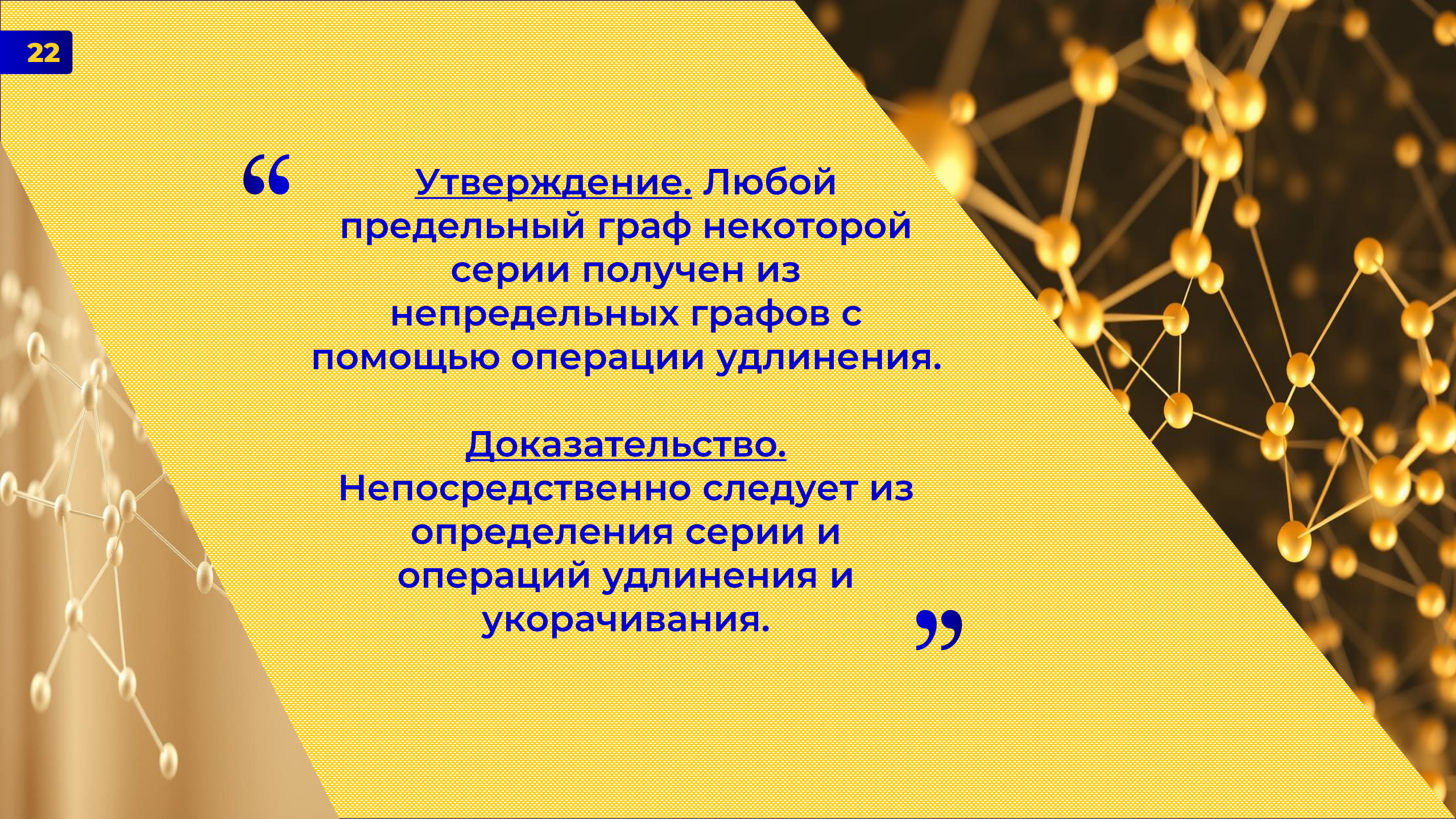
$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E|$$

Пример. Каждый из 72 студентов первого курса, присутствующих на лекции, поговорил по мобильному телефону с двумя своими товарищами, находящимися в той же аудитории. Какую сумму при этом заработали компании сотовой связи, если каждый разговор стоил 10 рублей?

Решение. Пусть каждый студент отождествляется с вершиной графа, а разговор – с ребром, соединяющим две вершины. По условию задачи $\deg(v) = 2, \forall v \in V(G)$

Отсюда $\sum_{i=1}^{72} \deg(v_i) = 72 \times 2 = 2 \times |E| \Rightarrow |E| = 72$

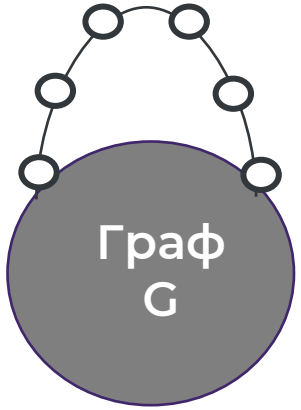
Ответ задачи: 72×10=720 рублей.



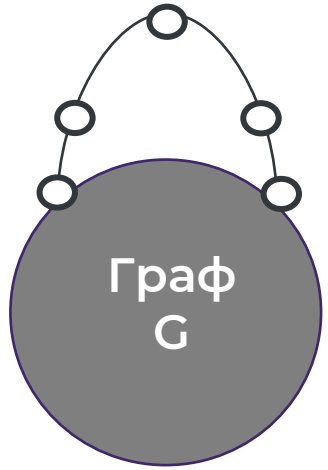
“ **Утверждение.** Любой предельный граф некоторой серии получен из непредельных графов с помощью операции удлинения.

Доказательство.
Непосредственно следует из определения серии и операций удлинения и укорачивания. ”

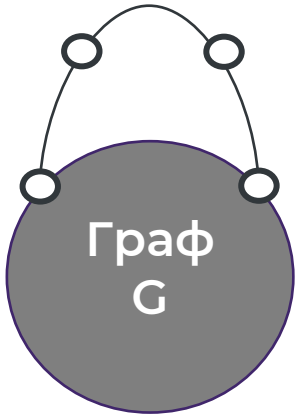
Операция удлинения



Предельный граф с n вершинами

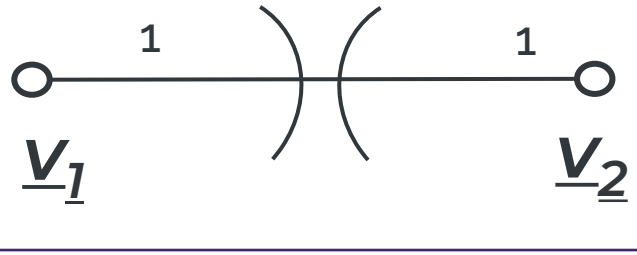


Непредельный граф с (n-1) вершинами

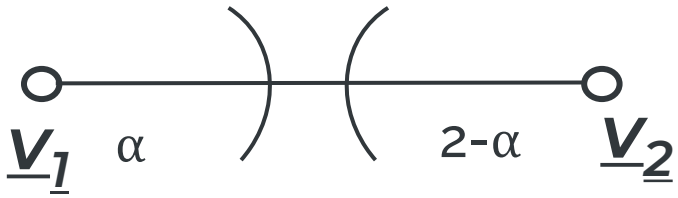


Непредельный граф с (n-2) вершинами

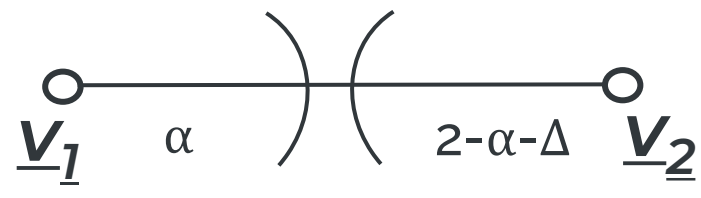
Обе теоремы (минимальное кол-во рёбер и нахождение предельных графов) доказаны с помощью метода перераспределения вкладов (МПВ). В чём его суть?



По Эйлеру

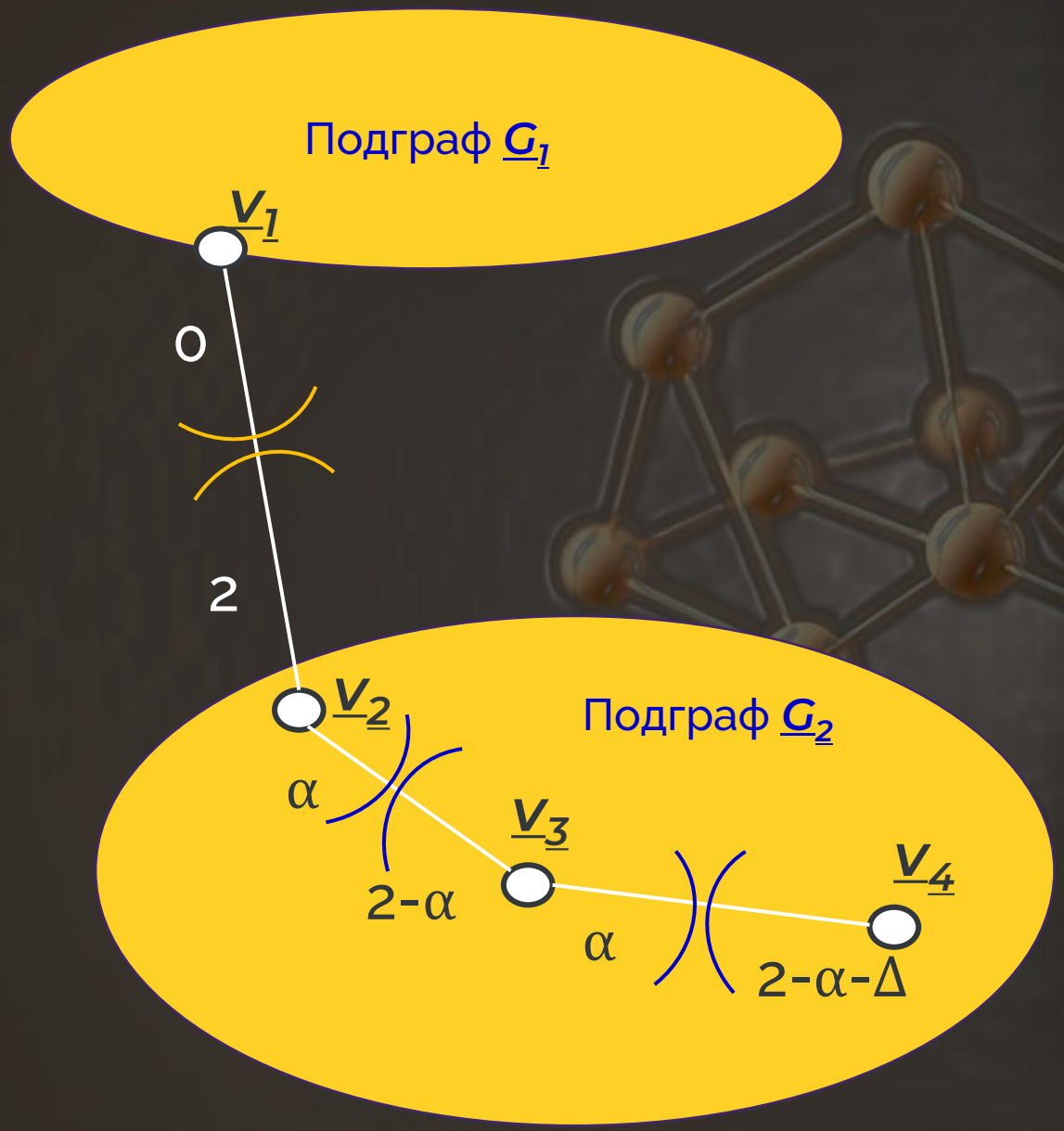


МПВ (простой случай)



МПВ (сложный случай) Δ добавляют к вкладам вершины, где их не хватает

Вводится понятие условной степени $\deg'(v)$, расширяющее понятие степени $\deg(v)$. Выполняется важное условие $\sum_{v \in V(G)} \deg'(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E|$



Как МПВ работает на графе?

$$\sum_{v \in G_2} deg'(v) + \sum_{v \in G_1} deg'(v) \leq 2|E| \leq \frac{2dn - 4d - 2}{d - 1}$$

Важный вопрос: МПВ приводит к какой-нибудь алгебраической формализации рассматриваемой задачи?

Да!!!

Пример небольшой части статьи:

$$\begin{cases} \alpha_{zz'} \geq \frac{2d-2x_1}{d-1} - \sum_{i=2}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-2}(a-1)(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-1}(d-1)} \\ \alpha_{zz''} \geq \frac{2d-2y_1}{d-1} - \sum_{j=2}^{s+1} \frac{2y_j}{2^{j-2}(b-1)(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1} - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{2x_j}{2^{j-1}(d-1)} \\ deg'z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \\ \sum_i x_i = \sum_j y_j = d - \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor \\ x_i \leq L, y_j \leq L \end{cases}$$

Итоговый результат

В статье разработан МПВ, позволяющий найти минимальное число ребер в графах из $\Im(n,d)$ для $d \geq 5$ и перечислить предельные графы, на которых это число ребер достигается, что усиливает предыдущие результаты по этой теме.

Поставленные в статье задачи решаются с помощью систем линейных уравнений и неравенств с несколькими параметрами, отражающие различные свойства рассматриваемых графов.

Указанный метод может являться перспективным для решения других задач экстремальной теории графов.

Перспективы метода и нерешенные задачи

Обозначим $\Im(n, d, d')$ графы с n вершинами, диаметром не более d и после удаления произвольной вершины или ребра диаметр полученного графа не превосходит d'. Какое минимальное число ребер в $\Im(n, d, d')$?
Задача решена для различных значений d и d' . В общем виде не решена совсем. Есть гипотеза Боллобаша, которая выполнена для всех известных значений d и d'.
Пусть $f(n, d, d')$ – минимальное число ребер в графах из $\Im(n, d, d')$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,d,d')}{n} = \frac{\left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor}$$

МПВ поможет продвинуться в решении этой задачи?