Глава 3. Исследование функций с помощью производных

3.1. Экстремумы и монотонность

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. *Говорят, что она имеет* ***локальный максимум*** *в точке* $x_0 \in I$, *если найдётся такая* δ *– окрестность точки* x_0, *что для всех точек* x *интервала* I, *попадающих в эту окрестность,* $f(x_0) \geq f(x)$. *Если вместо последнего неравенства выполняется неравенство* $f(x_0) \leq f(x)$, *то* x_0 *есть точка* ***локального минимума*** *функции* $f(x)$.

Локальный максимум и локальный минимум называются ***локальными экстремумами*** *функции.*

Если в предыдущих неравенствах заменить знаки $\geq$ *или* $\leq$ *строгими знаками* $>$ *или* $<$ *соответственно, то получатся определения* ***строгого локального максимума*** *и* ***строгого локального минимума*** **(*строгих локальных экстремумов*).**

Локальный экстремум называется ***глобальным экстремумом****, если соответствующее неравенство* ($f(x_0) \geq f(x)$, $f(x_0) \leq f(x)$, $f(x_0) > f(x)$, $f(x_0) < < f(x)$) *выполняется при всех* $x \in I$.

Первым этапом отыскания экстремумов функции $f(x)\colon I \to \mathbb{R}$ является обычно выделение точек интервала I, “подозрительных на экстремум”, т.е. таких, что экстремум функции, если он вообще существует, может быть только в этих точках, а не в других. Этот этап основан на следующей теореме.

Теорема 1 (необходимое условие наличия экстремума во внутренней точке интервала). *Если внутренняя точка* x_0 *интервала* I *есть точка экстремума функции* $f(x)$, *то либо производная* $f'(x_0)$ *не существует, либо она равна нулю.*

На рис. 1. иллюстрируются оба эти случая.

Доказательство. Пусть производная $f'(x_0)$ существует и не равна нулю. Тогда, для любого $x \in I$ можно записать

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

или $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)[1+o(1)] \quad (x\to x_0, x\ne x_0)$.

При достаточно малых $x - x_0$ величина $o(1)$ делается меньше единицы по модулю, и квадратная скобка оказывается положительной.

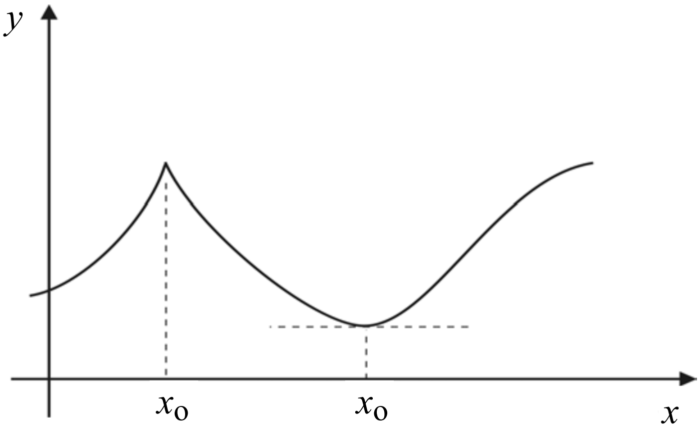

Рис. 1. К теореме 1.

Поэтому разность $f(x) - f(x_0)$ имеет различные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$. Это противоречит факту наличия экстремума в точке x_0. Теорема доказана.

*Каждая точка x_0, удовлетворяющая условию теоремы, называется **критической точкой**, или **точкой, подозрительной на экстремум**, функции $f(x)$ на I.*

Итак, *экстремумы функций могут находиться либо в критических точках, либо на границах интервала I, если эти границы входят в состав интервала.*

Возникает вопрос: как проверить, имеется ли действительно экстремум в подозрительной точке и какой именно (максимум или минимум)?

Если речь идёт только о нахождении глобальных экстремумов, то этот вопрос решается просто: надо вычислить значения функции $f(x)$ в подозрительных точках и выбрать те из этих точек, в которых $f(x)$ принимает наибольшее и наименьшее значения.

ПРИМЕР 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{10x+10}{x^2+2x+2}$$

на интервале $[-1,2]$.

Ясно, что данная функция определена на всей действительной оси, ибо квадратный трёхчлен в знаменателе в ноль не обращается (его дискриминант отрицателен, как легко проверить). Значит, функция везде имеет производную. Поэтому её глобальные экстремумы на интервале $\left[-1,2\right]$ могут реализоваться либо в граничных точках интервала, либо в его внутренних точках с нулевой производной. Вычисляя производную, получаем $y' = -\dfrac{10x\left(x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$. Она обращается в ноль в одной внутренней точке нашего интервала x_1=0. Ещё две подозрительные на экстремум точки – это границы интервала: $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$. Как и положено при поиске глобальных экстремумов, находим значения функции во всех подозрительных точках: $y(0) = 5$, $y(-1) = 0$, $y(2) = 3$. Сравнивая эти числа, видим, что глобальный минимум 0 достигается в левом конце интервала, глобальный максимум 5 – во внутренней точке $x = 0$.

Если же нужно найти локальные экстремумы, то описанный метод недостаточен. Как поступать в подобных случаях, выясним чуть позже. А пока рассмотрим способ определения монотонности функции $f(x)$ на интервале в том случае, когда $f(x)$ дифференцируема.

Теорема 2 (достаточные условия монотонности функции). *Пусть функция* $f(x)\colon\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $[a, b]$. *Тогда*

а) *если* $f'(x) = 0$ *на* $[a,b]$, *то* $f(x) = const$ *на* $[a, b]$.

б) *если* $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) *на* $[a, b]$, *то* $f(x)$ *не убывает* (*возрастает*) *на* $[a, b]$.

в) *если* $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) *на* $[a, b]$, *то* $f(x)$ *не возрастает* (*убывает*) *на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \left[a,b\right]$, $x_1 < x_2$. По формуле Лагранжа $f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = f'\left(c\right)\left(x_2 - x_1\right) + o\left(x_2 - x_1\right)$, где $x_1 < c < x_2$. Отсюда немедленно вытекают все утверждения теоремы.

Теперь можно вернуться к вопросу о наличии и характере локального экстремума в подозрительных точках.

Пусть функция $f(x)\colon I \to \mathbb{R}$ *имеет критическую точку* x_0 *внутри* I *и непрерывна в окрестности* x_0. *Предположим, что некоторые интервалы вида* $[x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta]$ *являются интервалами монотонности функции* $f(x)$. *Тогда вопрос о наличии и характере экстремума решается сравнением поведения* $f(x)$ *на этих интервалах.*

Если в интервалах $[x_0 - \delta, x_0], [x_0, x_0 + \delta]$ *функция* $f(x)$ *дифференцируема, то вопрос сводится к тому, меняет ли* $f'(x)$ *свой знак при переходе через точку* x_0.

В случае, когда x_0 *– граничная точка интервала* I, *надо исследовать поведение* $f(x)$ *(знак* $f'(x)$*) лишь с одной стороны от* x_0.

Итак, решение задачи о локальном экстремуме дифференцируемой функции $f(x)$ *в точке* x_0 *сводится к исследованию знака* $f'(x)$ *в окрестности* x_0.

ПРИМЕР 2. Построить график функции $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ с помощью производной первого порядка.

Ясно, что эта функция и её производная $y' = 48x^2 + 24x$ определены на всей числовой оси x. При приближении x к границам области определения, т.е. при $x \to \infty$, функция – бесконечно большая (отрицательная слева и положительная справа). Для определения её корней надо решать кубическое уравнение. После нескольких попыток перебора можно угадать корень $x = 0,5$. Как легко проверить с помощью теоремы Безу и деления кубического многочлена на $(x - 0,5)$, других корней наша функция не имеет.

Записав производную в виде $y' = 24x(2x+1)$, видим, что она обращается в ноль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -0,5$, положительна на интервалах $x < -0,5$ и $x > 0$, отрицательна при $-0,5 < x < 0$. Следовательно, в силу изложенной выше теории, функция строго возрастает на первых двух интервалах и строго убывает на последнем. Она имеет локальный максимум $y(-0,5) = -4$ и локальный минимум $y(0) = -5$. Глобальных экстремумов функция не имеет в силу неограниченности на бесконечности и сверху, и снизу.

Полученные данные позволяют нарисовать качественный график (эскиз графика) функции, представленный на рис. 2. При желании его можно уточнить “по точкам”.

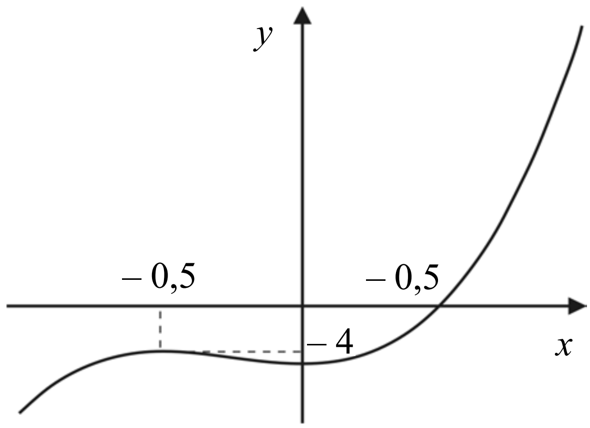

Рис. 2. График функции $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$.

ПРИМЕР 3. Построить график функции

$$y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8 \qquad (1)$$

с помощью производной первого порядка.

Прежде, чем решать какую либо задачу стандартным методом, следует внимательно посмотреть, нельзя ли её упростить до применения этого метода. В нашем случае видно, что если ввести новую независимую переменную функция переписывается в виде $y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2(x+4)$. Поэтому можно построить сначала график вспомогательной функции

$$y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x, \qquad (2)$$

а затем сдвинуть его на 4 единицы в отрицательном направлении оси x.

Функция (2) очевидным образом определена и непрерывна на всей числовой оси x. При $x \to \infty$, т.е. когда x стремится к границам области определения, она представляется в виде $y = -2x(1+o(1))$, следовательно является бесконечно большой (положительной при $x \to -\infty$ и отрицательной при $x \to +\infty$). Она обращается в ноль в точках, являющихся решениями уравнения

$$3x^{2/3} - 2x = x^{2/3}\left(3 - 2x^{1/3}\right) = 0,$$

т.е. при $x = 0$ и $x = 27/8$. Функция положительна при $x < 27/8$ и отрицательна при $x > 27/8$, что определяется путём решения соответствующих неравенств.

Перейдём к исследованию монотонности и экстремумов функции (2). Для этого вычисляем её производную, которая, как легко проверить, имеет вид

$$y' = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = 2x^{-1/3}\left(1 - x^{1/3}\right) \qquad (3)$$

и существует при всех x, кроме нуля. Тем самым точка $x = 0$ уже является подозрительной на экстремум. Другие возможные подозрительные точки находим, приравнивая нулю производную, что даёт $x = 1$. Находя промежутки монотонности функции (2), т.е. промежутки знакопостоянства производной (3), видим, что (2) убывает при $x < 0$, возрастает при $0 < x < 1$ и убывает при $x > 1$.Следовательно, $x = 0$ есть точка строгого минимума, равного нулю, а $x = 1$ - точка строгого максимума, равного, как легко сосчитать, двум.

Заметим ещё, что при $x \to -0$ и $x \to +0$ производная (3) стремится, соответственно, к $-\infty$ и к $+\infty$. Это значит, что в начале координат график функции имеет направленное вниз "остриё".

Учитывая все полученные выше сведения, можно сказать, что график функции (2) имеет вид, имеет вид, изображённый на рис. 3.

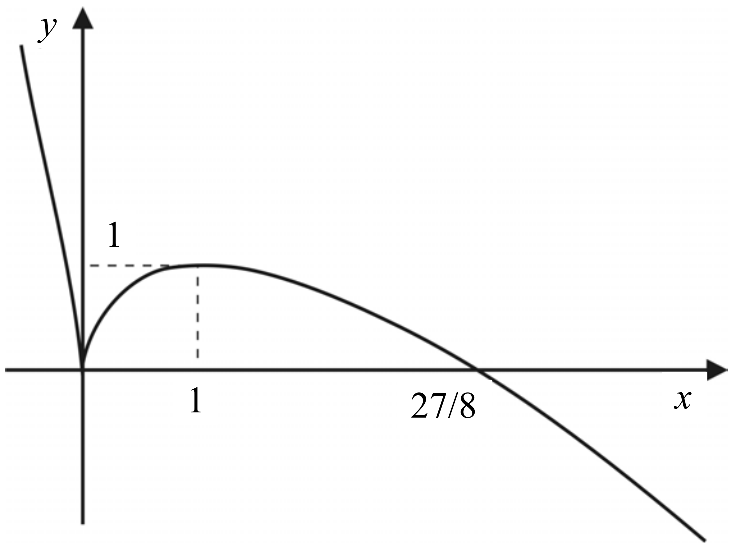

Рис. 3. График функции (2).

Читатель без труда "сдвинет" этот график надлежащим образом, чтобы получить график функции (1). На этом мы закончим с примером и продолжим теоретические рассуждения.

Если $f(x)$ имеет в подозрительной на экстремум внутренней точке x_0 интервала I производные порядка выше первого, то вопрос о наличии и характере экстремума в x_0 можно решить иначе: исследуя знаки производных только в самой точке x_0. А именно, имеет место

Теорема 3. *Пусть все производные порядка ниже n функции* $f(x)$ *во внутренней точке* x_0 *интервала I равны нулю, а* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда:*

а) *если n чётно, то* x_0 *– точка строгого экстремума функции* (*минимума при* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *максимума при* $f^{(n)}(x_0) < 0$);

б) *если n нечётно, то в* x_0 *экстремума нет.*

Доказательство. По формуле Тейлора в окрестности точки x_0 имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ при } x \to x_0.$$

Иначе: $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \left[1 + o(1)\right]$ при $x \to x_0$, $x \neq x_0$.

Из этой формулы вытекают утверждения теоремы. Действительно, при x, достаточно близких к x_0, величина $o(1)$ в последнем равенстве будет по модулю меньше единицы, а значит выражение в квадратных скобках будет положительным.

Далее, при чётном n величина $(x - x_0)^n$ оказывается положительной, независимо от того, с какой стороны от x_0 оказывается x. Поэтому знак приращения функции $f(x) - f(x_0)$ оказывается одинаковым с обеих сторон от x_0 и совпадающим со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Отсюда первое утверждение теоремы.

При нечётном n знак величины $(x - x_0)^n$ различен справа и слева от x_0, поэтому то же можно сказать и о знаке приращения $f(x) - f(x_0)$. Поэтому в точке x_0 экстремума быть не может.

ПРИМЕР 4. Исследовать поведение функции $y = x^2 - 2e^{x-1}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ с помощью производных высших порядков.

Для этого вычисляем последовательные производные данной функции в точке $x_0 = 1$, пока не попадём на производную, отличную от нуля:

$$y' = 2x - 2e^{x-1}, \quad y'(1) = 0,$$

$$y'' = 2 - 2e^{x-1}, \quad y''(1) = 0,$$

$$y''' = -2e^{x-1}, \quad y'''(1) = -2 < 0.$$

Этого достаточно. В соответствии с теоремой 3, точка $x_0 = 1$ не есть точка экстремума нашей функции, и её поведение в окрестности точки $x_0 = 1$ характеризуется следующей асимптотической формулой:

$$x^2 - 2e^{x-1} = -1 + \frac{-2}{3!}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right) = -1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

3.2. Выпуклость и точки перегиба

Говорят, что *функция* $f(x)$ ***вогнута*** (иначе, ***выпукла вниз***) *на интервале* $[a,b]$ (рис. 1), *если для любых точек* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *таких, что* $x_1 < x_2$, *график* $f(x)$ *на интервале* (x_1, x_2) *расположен не выше хорды, соединяющей его концы.*

Если вместо “не выше” говорить “ниже”, то получится определение ***сторогой вогнутости.***

Выпуклость *функции* $f(x)$ (иначе, ***выпуклость вверх***) *на интервале* $[a,b]$ *определяется аналогично.*

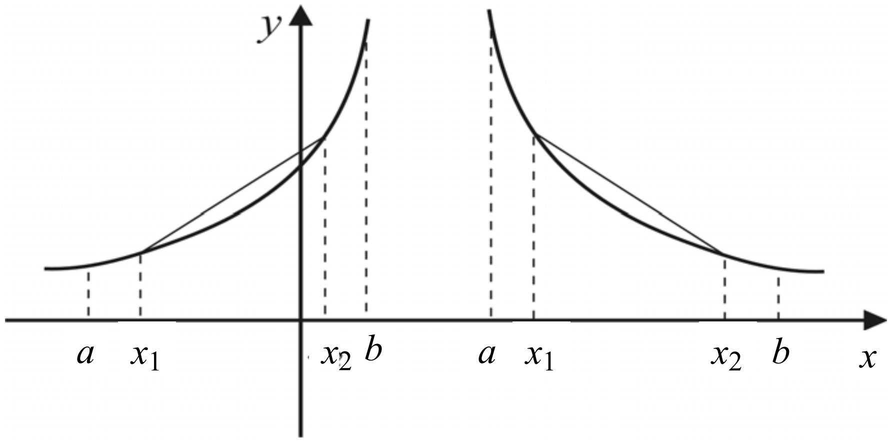

Рис.1. Вогнутость.

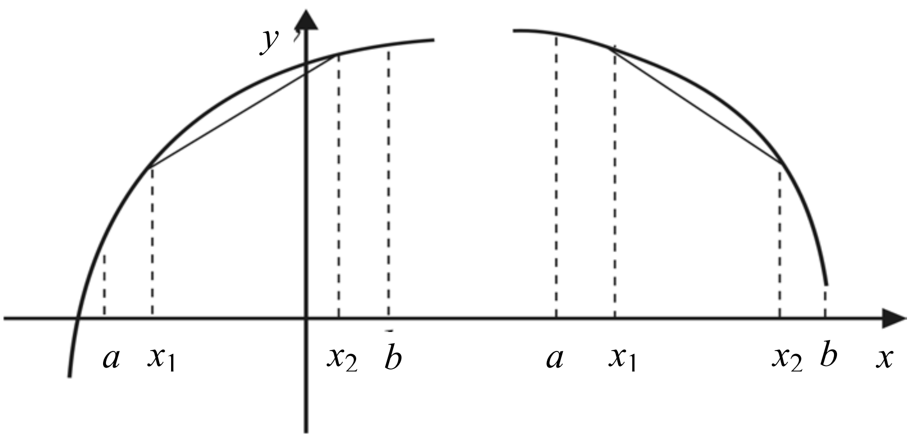

Рис.2. Выпуклость.

Точка x_0 *называется* ***точкой перегиба*** *функции* $f(x)$, *если она является общей границей интервала выпуклости и интервала вогнутости* $f(x)$, *причем сама функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 (рис. 3).

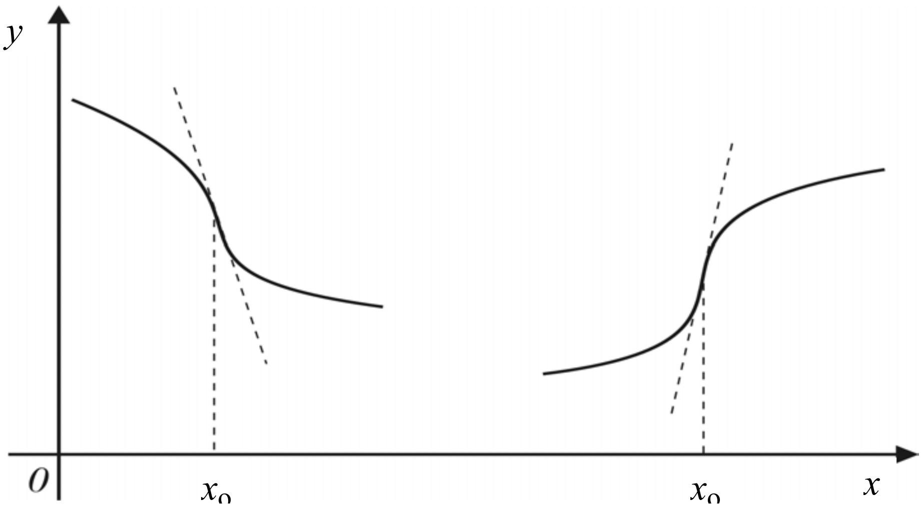

Рис. 3. Точки перегиба.

Ограничимся случаем, когда $f(x)$ дифференцируема на интервале $[a,b]$. Тогда выпуклость на этом интервале можно определить иначе: по относительному положению графика функции и касательных к нему (а не хорд). *Функция* $f(x)$ ***вогнута*** *(строго вогнута) на* $[a,b]$, *если касательная к графику* $f(x)$ *в каждой точке из* $[a,b]$ *лежит не выше (ниже) этого графика.* Аналогично определяется ***выпуклость*** **(*строгая выпуклость*).** Мы не будем доказывать геометрически очевидную эквивалентность двух определений.

Но если пользоваться определением с помощью касательных, становится ясно, что *интервал выпуклости* $f(x)$ *оказывается интервалом монотонности производной* $f'(x)$. В самом деле, достаточно нарисовать на рис. 1 и 2 касательные к графику в точках x_1, x_2. Выяснится, что для вогнутости (рис. 1) получится $f'(x_1) < f'(x_2)$, а для выпуклости (рис. 2) будет $f'(x_1) > f'(x_2)$. *Что касается точек перегиба, то они оказываются точками, в которых меняется направление изменения* $f'(x)$, *т.е. точки экстремумов функции* $f'(x)$.

Отсюда важный вывод: *исследовать* $f(x)$ *на выпуклость и перегибы означает исследовать* $f'(x)$ *на монотонность и экстремумы.*

Иначе говоря, *для дифференцируемой на* $[a,b]$ *функции* $f(x)$:

а) *Точками перегиба* $f(x)$ *могут быть только точки, в которых* $f''(x)$ *не существует или равна нулю.*

б) *Интервалы выпуклости* $f(x)$ *– это интервалы монотонности* $f'(x)$. *При наличии* $f''(x)$ *– это интервалы постоянного знака* $f''(x)$.

в) *Вопрос о наличии перегиба в подозрительной* (см. пункт *а*) *точке* x_0 *можно решать, сравнивая характер монотонности* $f'(x)$ *слева и справа от* x_0 (сравнивая знаки $f''(x)$).

г) *Тот же вопрос можно решать, исследуя значения высших производных в самой точке* x_0 (см. последнюю теорему из разд. 3.1, заменив $f(x)$ на $f'(x)$).

3.3. Наклонные асимптоты. Общая схема исследования функции

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) \tag{1}$$

в область определения которой входят все достаточно большие по модулю значения x, так что можно обсуждать поведение функции при $x \to \infty$.

Наклонной асимптотой *функции* (1) *называется прямая*

$$y = kx + b \tag{2}$$

такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0 \tag{3}$$

Другими словами, расстояние между графиком функции (1) и прямой (2) должно стремиться к нулю при $x \to \infty$.

Как выяснить по заданной функции (1), имеет ли она наклонную асимптоту, и, если да, как найти соответствующие числа k и b?

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы функция (1) имела наклонную асимптоту (2), необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что асимптота существует. Тогда верно равенство (3), которое мы перепишем в виде

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to \infty).$$

Из него следует, что $\dfrac{f(x)}{x} - k = o(1) \quad (x \to \infty)$. Но это означает, что существует первый из пределов (4).

Теперь из (3) имеем: $b = f(x) - kx + o(1)$. Это означает справедливость второго равенства (4).

Обратно, пусть справедливы формулы (4). Тогда

$$f(x) - (kx + b) = [\ f(x) - kx] - b = [b + o(1)] - b = o(1),$$

т.е. верно (3), и прямая (2) является асимптотой. Теорема доказана.

Все приведённые выше рассуждения по поводу асимптоты остаются в силе, если везде заменить $x \to \infty$ на $x \to +\infty$ или на $x \to -\infty$. *Соответствующие асимптоты называются односторонними* (*правосторонней и левосторонней соответственно*).

В заключение настоящей главы отметим следующее обстоятельство. Каждую конкретную функцию мы изучаем с целью использования тех или иных её свойств для решения поставленных задач. Тем не менее, можно рекомендовать выработанную опытом примерную ***общую схему исследования функции***, в которой каждый этап облегчает выполнение последующих.

Общая схема исследования функции:

1. Найти область определения функции и исследовать поведение функции в граничных точках этой области (при стремлении аргумента к границе области). Найти вертикальные асимптоты.
2. Выяснить симметрию графика (четность или нечетность функции) и вопрос о периодичности функции.
3. Найти точки разрыва и промежутки непрерывности.
4. Определить нули (корни) функции и промежутки знакопостоянства.
5. Найти точки и значения экстремумов и промежутки монотонности.
6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости.
7. Найти наклонные асимптоты графика функции.
8. Указать другие специфические особенности функции.
9. Построить график функции.

ПРИМЕР. Построить график функции

$$y = \frac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}} \tag{5}$$

1. Область определения функции определяется условием $4x^2-1>0$, т.е. имеет вид $\{x : x<-1/2 \text{ или } x>1/2\}$. При $x\to -1/2-0$ и при $x\to 1/2+0$ функция (5) является положительной бесконечно большой. В самом деле, ее знаменатель стремится к нулю, оставаясь положительным, а числитель имеет предел 6,5. Таким образом, график имеет две вертикальные асимптоты: $x=-1/2$ и $x=1/2$. Если $x\to-\infty$ либо $x\to+\infty$, то $y=\dfrac{-10x^2\left[1+o(1)\right]}{2|x|\sqrt{1+o(1)}}=-5|x|\left[1+o(1)\right]$,

Значит $y\to-\infty$, т.е. функция (5) является отрицательной бесконечно большой.

2. Также очевидно, что функция является чётной. Поэтому в дальнейшем исследовании ограничимся лишь правой половиной области определения. В конце исследования, получив соответствующий график, добавим к нему его отражение относительно оси y.

3. Функция (5) непрерывна во всех точках своей области определения.

4. Поскольку знаменатель выражения (5) положителен, вопрос о его корнях и промежутках знакопостоянства решается лишь с помощью числителя. Рассматривая квадратичную функцию $9-10x^2$, находим, что функция (5) положительна при $1/2<x<3/\sqrt{10}$, равна нулю при $x=3/\sqrt{10}$ и отрицательна при $x>3/\sqrt{10}$.

5. Для анализа функции (5) на монотонность и экстремумы вычисляем её производную, получая выражение

$$y'=-\frac{4x\left(10x^2+4\right)}{\left(4x^2-1\right)^{3/2}},$$

определённое для всех x из области определения функции (5). Легко заметить, что это выражение отрицательно при всех $x>1/2$. Значит, на этом интервале производная отрицательна, и функция (5) строго убывает. Никаких экстремумов нет.

6. Для исследования функции на выпуклость и точки перегиба вычисляем вторую производную функции (5):

$$y''=\frac{8\left(47x^2-2\right)}{\left(4x^2-1\right)^{5/2}}.$$

Эта производная положительна при $x > \sqrt{\frac{2}{47}}$, т.е. и подавно при $x > 1/2$. Следовательно, на этом интервале нет точек перегиба, и функция (5) вогнута.

7. Наконец, обратимся к вопросу о наклонных асимптотах. При $x \to +\infty$ имеем:

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{9-10x^2}{x\sqrt{4x^2-1}} = \frac{-10x^2\left(1+o(1)\right)}{x \cdot 2x\sqrt{1+o(1)}} \to -5.$$

Следовательно, $k = -5$. Затем:

$$f(x) - kx = \frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}} + 5x = \frac{-10x^2\left(1+o(1)\right)}{2x\sqrt{1+o(1)}} + 5x \to 0.$$

Поэтому $b = 0$.

На основании полученных данных можно рисовать качественный график функции (5), уточняя его, при желании, “по точкам” (рис. 1).

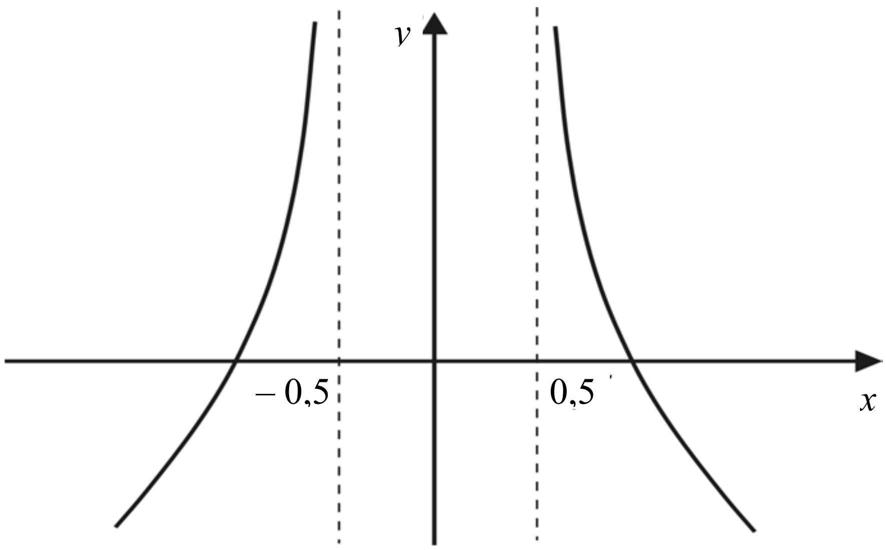

Рис. 1. График функции $y = \frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Теоретические вопросы к главе 3.

1. Дать определение экстремумов функции, заданной на интервале (локальных и глобальных, строгих и нестрогих).

2. Что такое точки, подозрительные на экстремум? Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии наличия экстремума во внутренней точке интервала.
3. Как найти глобальный экстремум функции, если известны все подозрительные на экстремум точки интервала?
4. Сформулировать и доказать теорему о достаточных условиях монотонности функции.
5. Как с помощью первой производной исследовать наличие и характер экстремума в точках интервала, подозрительных на экстремум?
6. Сформулировать и доказать теорему об исследовании подозрительных на экстремум точкек с помощью высших производных.
7. Дать определения выпуклости и вогнутости функции на интервале (строгой, нестрогой) с помощью хорд. Дать определение точки перегиба.
8. Дать определение выпуклости функции на интервале в случае её дифференцируемости – с помощью касательных.
9. Как исследовать дифференцируемую функцию на выпуклость и точки перегиба?
10. Дать определение наклонной асимптоты к графику функции и указать способ нахождения наклонных асимптот (с обоснованием).
11. Что понимается под общим исследованием функции?