Глава 2. Производные и дифференциалы

2.1. Исходные понятия

Мы приступаем к изучению раздела математики, называемого ***дифференциальным исчислением.*** В нём продолжается исследование свойств функций, заданных на сплошных множествах (интервалах), с помощью понятия предела функции. Но если в предыдущей главе такое исследование было доведено лишь до выяснения свойств непрерывных функций, то дифференциальное исчисление продвигает его намного дальше.

Свойство непрерывности говорит о том, что функция мало отклоняется от своего значения в точке x_0 при малом отклонении Δx аргумента от x_0. Поэтому в окрестности точки x_0 непрерывную функцию можно приближённо заменить константой – её значением в x_0, при этом абсолютная ошибка приближения стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Однако, такая аппроксимация никак не отражает того, как меняется функция при переходе независимой переменной x через точку x_0: быстро или медленно, возрастая или убывая. Дифференциальное же исчисление задаёт себе, в первую очередь, именно эти вопросы. Чтобы ответить на них, формулируются понятия *производной* и *дифференциала* функции в точке x_0, с помощью которых удается построить более точную аппроксимацию функции в окрестности x_0, а именно аппроксимацию не константой, а линейной функцией. Такая аппроксимация отражает не только величину, но и тенденцию изменения функции в точке x_0. Значение такого подхода к локальному исследованию функции связано с тем, что он позволяет ввести строгое понятие скорости изменения функции в точке. На языке физики это предоставляет, например, возможность дать строгое определение понятию скорости неравномерного движения; на языке геометрии – возможность определить касательную к произвольной линии. С такого рода приложениями и было связано бурное развитие основ дифференциального исчисления во второй половине XVII века – в эпоху расцвета механики и астрономии.

Дифференциальное исчисление было создано одновременно и независимо друг от друга Исааком Ньютоном (1643–1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716). Конечно, они опирались на догадки и частные результаты своих предшественников. Надо отметить, что, как это часто бывает с первооткрывателями, изложение основ дифференциального исчисления Ньютоном и Лейбницем было весьма громоздким, их многочисленные результаты далеко не всегда были строго обоснованы. Понадобилась кропотливая работа их учеников и последователей для того, чтобы дифференциальное исчисление приобрело тот совершенный вид, который присущ ему сейчас. Этапными в этом направлении были работы Огюстена Коши (1789–1857) и уже знакомого нам Карла Вейерштрасса (1815–1897).

Переходим к систематическому изложению основ дифференциального исчисления. Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале I оси $\mathbb{R}$ и имеет действительные значения. Зафиксируем внутреннюю точку $x_0 \in I$ и рассмотрим ещё какую-либо точку $x \in I$. Разность $\Delta x = x - x_0$ назовём ***приращением независимой переменной*** в точке x_0, разность $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – соответствующим ***приращением функции***.

Отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

называется ***разностным отношением*** функции $f(x)$ для точек x_0, x.

Предел разностного отношения (1) *при* $x \to x_0$, *т.е. число*

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

называется ***производной*** *функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Равенство (2) эквивалентно соотношению

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1), \quad x \to x_0,$$

а, значит, и соотношению

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0 \tag{3}$$

Это последнее утверждение означает, что *приращение функции разбивается на два слагаемых: первое есть величина, пропорциональная приращению* $x - x_0$ *независимого переменного с коэффициентом пропорциональности, не меняющимся при изменении x; второе бесконечно мало по сравнению* с $x - x_0$ *при* $x \to x_0$ (рис. 1).

Функция, для которой разложение (3) *возможно, называется* ***дифференцируемой*** *в точке* x_0 (от лат. *differentiare* – разделять на две части).

Итак, *существование производной в точке эквивалентно дифференцируемости этой функции в той же точке.*

Слагаемое $f'(x_0)(x-x_0)$ *в* (3) *называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке* x_0, *соответствующим приращению* $x - x_0$ *независимой переменной.*

Дифференциал имеет специальные обозначения:

$$df(x_0) = dy(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \tag{4}$$

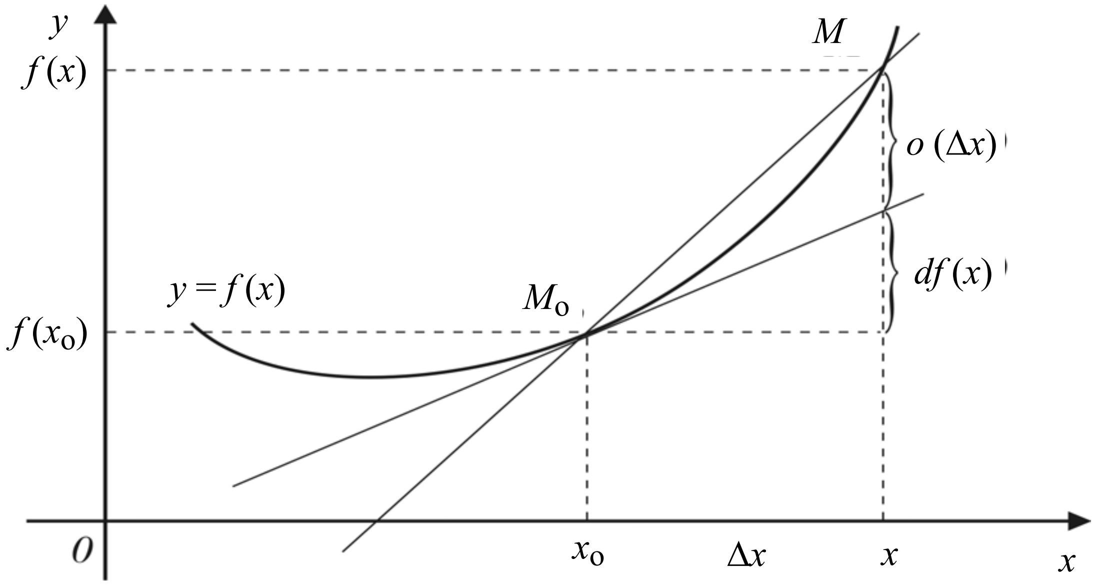


Рис.1. Геометрический смысл производной и дифференциала.

Теорема 1 (о непрерывности дифференцируемой функции).

Дифференцируемая в точке x_0 *функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке.*

Доказательство немедленно вытекает из формулы (3): она показывает, что $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

Обратная теорема не верна, что хорошо видно на примере функции $y = |x|$ при $x \to 0$.

Таким образом, дифференцируемость есть более жёсткое ограничение на функцию, чем непрерывность. Зато, если непрерывную в x_0 функцию можно аппроксимировать в окрестности x_0 константой с точностью всего лишь $o(1)$

при $x \to x_0$ (с абсолютной ошибкой, стремящейся к нулю), то дифференцируемую в x_0 функцию можно аппроксимировать линейной функцией со значительно более высокой точностью $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$ (с относительной ошибкой, стремящейся к нулю). Эта последняя аппроксимация даёт представление не только о значениях функции в окрестности точки x_0, но и о тенденции её изменения в этой точке.

Осмыслим геометрически наши рассуждения. Разностное отношение (1) есть тангенс угла наклона секущей M_0M к оси Ox. Существование предела (2) означает наличие предельного положения ℓ этой секущей при стремлении точки M на графике функции к фиксированной точке M_0. *Прямая ℓ называется* ***касательной*** *к графику функции $f(x)$ в точке M_0.*

Уравнение касательной есть

$$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \tag{5}$$

Итак, *существование производной $f'\left(x_0\right)$ геометрически означает существование касательной* (5). При этом исключается наличие в точке M_0 графика функции “угла” или ”острия” (см. рис. 2)

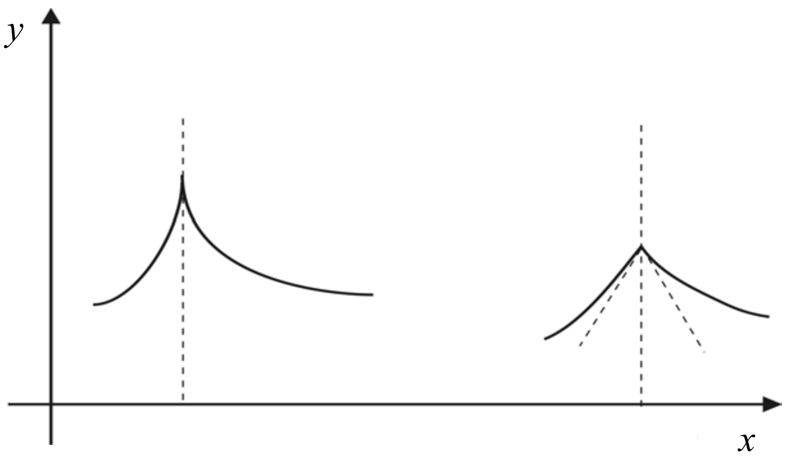


Рис.2. Примеры отсутствия производной в точке x_0.

Поэтому функцию, имеющую в точке x_0 производную, часто называют ***гладкой*** в этой точке.

Дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 означает возможность заменить график функции в районе этой точки касательной к нему с ошибкой $o(x - x_0)$ (рис. 1). При этом приращение функции заменяется её дифференциалом в x_0.

Понятия производной и дифференциала хорошо интерпретируются на языке механики. Предположим, что переменная x означает время, а функция $y = f(x)$ есть закон движения точки по оси Оy. В этом случае разностное соотношение (1) называется ***средней скоростью*** движения за интервал времени от момента x_0 до момента x.

Мгновенной скоростью *движения в момент* x_0 *называется производная* $f'(x_0)$. Таким образом, существование мгновенной скорости – это существование производной. Отсутствие $f'(x_0)$ может, в частности, означать то, что в момент времени x_0 движение претерпевает мгновенное изменение типа “удара”. При этом скорость в момент x_0 не определена. Можно говорить лишь о скоростях непосредственно перед ударом и непосредственно после него.

Подчеркнем, что *интуитивное физическое представление о мгновенной скорости находит своё точное выражение только в математическом понятии производной.* Это классический пример математического моделирования реальных явлений.

Замена приращения функции $f(x)-f(x_0)$ её дифференциалом $f'(x_0)(x-x_0)$ кинематически означает приближенную замену неравномерного движения $y = f(x)$ равномерным движением $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ с постоянной скоростью $f'(x_0)$, совпадающей с мгновенной скоростью исходного движения в момент x_0.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных.

ПРИМЕР 1. $f(x)=c=const$.

При любом $x_0\in\mathbb{R}$ имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0\to 0$ при $x\to x_0$. Значит, $f'(x_0)=0,\quad df(x_0)=0$. Другими словами,

$$(const)'=0,\qquad d(const)=0 \tag{6}$$

ПРИМЕР 2. $f(x)=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$ – константа).

Для любого $x_0 \neq 0$ из области определения имеем при $x \to x_0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(x_0 + \Delta x\right)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{\Delta x} = \frac{x_0^{\alpha}\left[\left(1 + \Delta x/x_0\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x_0} \cdot \frac{\left(1 + \Delta x/x_0\right)^{\alpha} - 1}{\alpha \cdot \Delta x/x_0} \to \alpha x_0^{\alpha-1}$$

Здесь использовано равенство (5) из п. 1.4. Итак,

$$\begin{aligned} &\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \left(x \neq 0\right) \\ &dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}\Delta x, \quad \left(x \neq 0\right) \end{aligned} \tag{7}$$

В случае $x_0 = 0$ (если функция x^{α} определена в этой точке) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\Delta x\right)^{\alpha} - 0}{\Delta x} = \left(\Delta x\right)^{\alpha-1}$. При $\alpha > 1$ эта величина имеет пределом ноль, при $\alpha = 1$ предел равен единице, т.е. формулы (7) сохраняют силу. Если же $\alpha < 1$, то производная функции x^{α} в точке $x = 0$ не существует.

ПРИМЕР 3. $f\left(x\right) = e^{x}$.

Для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем при $x \to x_0$ (с учетом равенства (4) из п. 1.4): $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \to e^{x_0}$. Поэтому

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}, \quad d\,e^{x} = e^{x}\Delta x. \tag{8}$$

ПРИМЕР 4. $f\left(x\right) = \cos x$.

При любом $x_0 \in \mathbb{R}$ получаем при $x \to x_0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x_0 + \Delta x\right) - \cos x_0}{\Delta x} = \frac{\cos x_0 \cos \Delta x - \sin x_0 \sin \Delta x - \cos x_0}{\Delta x} =$$

$$= \cos x_0 \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x_0 \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \to -\sin x_0$$

Здесь использованы равенства (1), (2) из п. 1.4. Итак,

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x, \quad d\cos x = -\sin x\Delta x. \qquad (9)$$

Аналогично для любых $x \in \mathbb{R}$ выводятся формулы

$$\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad d\sin x = \cos x\Delta x. \qquad (10)$$

Вернемся к теории. Если в формуле (2) рассматривать предел не при $x \to x_0$, а при $x \to x_0 - 0$ (или $x \to x_0 + 0$), то получится определение ***левой*** (или ***правой***) ***производной в точке x_0***. Она обозначается символом $f'\left(x_0 - 0\right)$ (или $f'\left(x_0 + 0\right)$).

Понятно, что левая производная функции $f(x)$ совпадает с обычной производной, если x_0 есть наибольшее число из области определения $f(x)$: ведь при этом стремление $x \to x_0$ может осуществляться только со стороны $x < x_0$. Аналогичное замечание касается правой производной.

Если же x_0 – внутренняя точка области определения $f(x)$, то производная $f'\left(x_0\right)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой обе односторонние производные $f'\left(x_0 - 0\right)$ и $f'\left(x_0 + 0\right)$. При этом $f'\left(x_0\right)$ равна общему значению этих односторонних производных.

На языке геометрии существование односторонней производной означает наличие соответствующей ***односторонней касательной*** в данной точке (см. рис. 2). На языке кинематики $f'\left(x_0 - 0\right)$ и $f'\left(x_0 + 0\right)$ – это мгновенные скорости ″до и после удара″ в момент x_0.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $I \subset \mathbb{R}$, то говорят, что $f(x)$ ***дифференцируема на*** *I*, или ***гладкая на*** *I*. Производную $f'\left(x\right)$ можно рассматривать в этом случае как функцию, заданную на интервале *I*.

2.2. Основные правила дифференцирования

Из заданных дифференцируемых функций с помощью различных операций (арифметических, образования сложных функций, перехода к обратным функциям и т.д.) можно образовывать новые функции. Будут ли функции, получающиеся в результате таких операций, тоже дифференцируемыми и как вычислить их производную, зная производные исходных функций?

Теорема 1 (о связи дифференцирования с арифметическими операциями). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x, то:*

а) *их сумма $f(x)+g(x)$ имеет производную в точке x, причем*

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x);$$

б) *их произведение $f(x)\cdot g(x)$ имеет производную в точке x, причем*

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)+g'(x)f(x);$$

в) *при дополнительном условии $g(x)\neq 0$ их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство:

а) при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\left[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\to f'(x)+g'(x).$$

б) при $\Delta x \to 0$, используя непрерывность дифференцируемой функции $g(x)$, получаем

$$\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\to$$

$$\to f'(x)g(x)+g'(x)f(x).$$

в) при условиях пункта б), получаем

$$\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-g(x+\Delta x)f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\right]\to$$

$$\to\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Следствия:

а) Операция дифференцирования в точке x обладает свойством линейности: если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в x, а α и β – числа, то функция $\alpha f(x)+$ $+\beta g(x)$ дифференцируема в точке x, причем

$$\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]'=\alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

б) Пункты а) и б) предыдущей теоремы обобщаются для случая нескольких складываемых или перемножаемых функций, причем

$$\left[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right]'=f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)$$

$$\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)\right]'=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)+$$
$$+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot...\cdot f_n(x)+...+f_1(x)\cdot...\cdot f_{n-1}(x)\cdot f_n'(x).$$

ПРИМЕР 1. Пусть имеется многочлен степени n:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\quad (a_n\neq 0).$$

Его производная – это многочлен степени $n-1$:

$$P_n'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+...+a_1.$$

ПРИМЕР 2. Имеем

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad d\operatorname{tg}x=\frac{\Delta x}{\cos^2 x}.\qquad (1)$$

Аналогично,

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad d\left(\operatorname{ctg} x\right) = -\frac{\Delta x}{\sin^2 x}. \qquad (2)$$

Теорема 2 (о дифференцировании сложной функции). *Рассмотрим сложную функцию* $h(x) = g(f(x))$. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *а функция* $z = g(x)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то* $h(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем*

$$h'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу

$$h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Заметим для этого, что при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x), \quad \alpha(\Delta x) = o(\Delta x).$$

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y), \qquad \beta(\Delta y) = o(\Delta y).$$

По определению $o(\Delta y)$ имеем $\beta(\Delta y) = \gamma(\Delta y)\Delta y$, где $\gamma(\Delta y) = o(1)$ при $\Delta y \to 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) &= g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \gamma(\Delta y)\Delta y = \\ &= g'(y_0)\left[f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\right] + \gamma(\Delta y)\left[f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\right] = \\ &= g'(y_0) f'(x_0)\Delta x + \left\{g'(y_0)\alpha(\Delta x) + \gamma(\Delta y)\left[f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, величина в фигурных скобках есть $o(\Delta x)$, т.к. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0. Теорема доказана.

ПРИМЕР 3. Функция $f(x) = a^x$ может быть рассмотрена как сложная функция, составленная из функций $y = x \ln a$ и $z = e^y$. Поэтому $\left(a^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^y \ln a = a^x \ln a$. Итак,

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad da^x = a^x \ln a \Delta x. \qquad (3)$$

В частности, мы снова, как частный случай, получили формулу (8) из п. 2.1. Видно, что показательная функция с основанием e (экспонента) дифференцируется значительно проще, чем показательная функция с произвольным основанием.

Теорема 3 (о производной обратной функции). *Пусть функция* $y = y(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и имеет обратную функцию* $x = x(y)$ *в окрестности точки* $y_0 = y(x_0)$. *Пусть также* $y'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция дифференцируема в точке* y_0, *причем*

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть Δy_n – произвольная бесконечно малая последовательность приращений независимой переменной обратной функции в точке y_0. Ей соответствует последовательность приращений значения этой функции $\Delta x_n = x(y_0 + \Delta y_n) - x(y_n)$. Она также стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу непрерывности в y_0 функции, обратной к дифференцируемой функции $y = y(x)$. Поскольку $y'(x_0) \neq 0$, то последовательность разностных отношений $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ не может иметь нулевые члены при достаточно больших n. Поэтому можно написать $\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = \frac{1}{\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}} \to \frac{1}{y'(x_0)}$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Можно убедиться в справедливости теоремы 3 менее строгим, но более наглядным путём. На рисунке 1 изображен график функции $y = y(x)$. Эта же кривая является графиком обратной функции $x = x(y)$, если считать y независимой переменной, а x – функцией. Наличие производной $y'(x_0)$ означает существование касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке M_0, причём

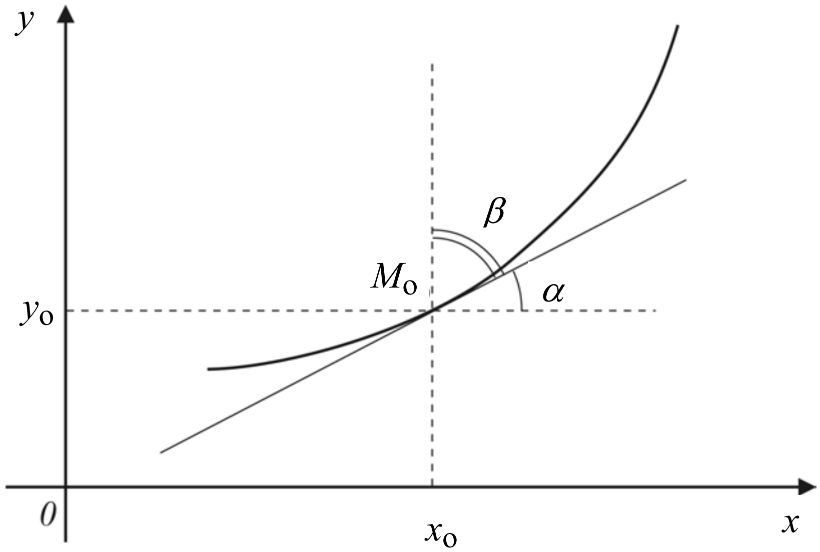


Рис. 1. К теореме 3.

$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Конечно, эта касательная является касательной и к графику функции $x = x(y)$ в той же точке M_0. Тем самым существует производная $x'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$ (если только касательная прямая не горизонтальна). Поскольку, очевидно, $\alpha + \beta = \pi/2$, тангенсы углов α и β, т.е. производные $y'(x_0)$ и $x'(y_0)$ являются взаимно обратными числами, что и нужно.

ПРИМЕР 4. Функция $y = \log_a x$ – обратная к функции $x = a^y$, поэтому при любом $x > 0$ имеем $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$. Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad d(\log_a x) = \frac{\Delta x}{x \ln a}. \tag{4}$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad d(\ln x) = \frac{\Delta x}{x}. \tag{5}$$

ПРИМЕР 5. Для обратных тригонометрических функций находим $(\arccos x)' = \dfrac{1}{(\cos y)'} = -\dfrac{1}{\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \arccos x = -\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| \le 1) \tag{6}$$

Аналогичным же образом получаются формулы

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \arcsin x = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| \le 1) \tag{7}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arctg} x = \frac{\Delta x}{1+x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

Таким образом, показано, что *любая основная элементарная функция имеет производную в каждой точке своей области определения*. Из теорем этого раздела вытекает, что *все элементарные функции обладают этим же свойством.*

Часто *функция $y = y(x)$ определяется с помощью задания переменных x и y как функций ещё одной переменной t, называемой* ***параметром***. *Тогда гово-*

рят, что функция $y(x)$ ***задана параметрически***. *Точнее, пусть даны две функции*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad (9)$$

определённые на одном и том же интервале $I \subset \mathbb{R}$. *Пусть, кроме того, функция x=φ(t) имеет обратную функцию* $t = \varphi^{-1}(x)$, *определённую на интервале* $J \subset \mathbb{R}$. *Тогда существует сложная функция*

$$y = y(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right), \qquad (10)$$

заданная на J. Это и есть функция, заданная параметрическими соотношениями (9).

Говоря на языке механики, если известно, как меняются со временем t декартовы координаты x, y движущейся по плоскости точки (формулы (9)), то можно найти траекторию её движения (линию, по которой точка движется) в виде (10).

ПРИМЕР 6.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left(t \in [0, \pi]\right). \qquad (11)$$

Функция $x = \cos t$ имеет на интервале $[0, \pi]$ обратную функцию: $t = \arccos x$, определённую при $x \in [-1, 1]$. Поэтому y оказывается на этом интервале сложной функцией от x, имеющей вид $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. Легко видеть, что график этой функции есть верхняя половина окружности единичного радиуса с центром в начале координат (ибо $x^2 + y^2 = 1$, и $y \geq 0$).

Заметим, что заменив в (11) интервал $[0, \pi]$ на, скажем, $\left[\pi/2, 3\pi/2\right]$, мы не получили бы параметрически заданной функции (10), поскольку на таком интервале функция $x = \cos t$ не имеет обратной.

В конкретных случаях выписать параметрически заданную функцию аналитически в явном виде (10) бывает трудно или даже невозможно. Тем не менее, её нужно как-то анализировать, например вычислять её производную. На помощь приходит следующая

Теорема 4 (о производной функции, заданной параметрически) . *Если функции* (9) *дифференцируемы при некотором t, причем* $\varphi'(t) \neq 0$*, то заданная параметрически функция* (10) *дифференцируема при* $x = \varphi(t)$. *Производная* $y'(x)$ *вычисляется по формуле*

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{12}$$

Доказательство следует из теорем 2 и 3.

Отметим, что здесь мы встретились со случаем, когда одна и та же переменная (y в данном случае) может рассматриваться либо как функция t, либо как функция x. В подобных ситуациях, чтобы уточнить по какой именно переменной происходит дифференцирование, вместо штриха (или наряду с ним) употребляют соответствующий нижний индекс. Например $y'(t) = y'_t = y_t$.

ПРИМЕР 7. Чтобы продифференцировать параметрически заданную функцию примера 6, действуем так:

$$y'(x) = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Эта производная существует при всех $t \in (0, \pi)$, т.е. при всех $x \in (-1, 1)$. В граничных точках этих интервалов она обращается в бесконечность (касательные к графику функции $y = y(x)$ вертикальны).

Закончив с функциями, заданными параметрически, познакомимся с ещё одним приёмом дифференцирования. Рассмотрим функцию вида

$$y = f(x)^{g(x)}, \tag{13}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы. Чтобы продифференцировать (13), удобно предварительно прологарифмировать это равенство по основанию e. Получаем $\ln y = g(x) \ln(f(x))$. После этого дифференцирование с использованием теоремы о сложной функции даёт $\frac{1}{y(x)} y'(x) = g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)$,

откуда

$$y'(x) = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right].$$

Описанный метод называется ***логарифмическим дифференцированием.***

Закончим раздел введением некоторых новых обозначений. Мы знаем, что если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, и $d\,f(x) = dx = 1\cdot\Delta x$. Таким образом, приращение Δx независимой переменной совпадает с дифференциалом dx функции $f(x) = x$. Поэтому обозначения Δx и dx рассматриваются как равносильные.

Пусть теперь $y = y(x)$– произвольная дифференцируемая функция. Поскольку $dy=y'(x)\Delta x$, можно записать $y'(x) = \dfrac{dy}{\Delta x}$ или $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Правая часть последнего равенства очень часто применяется как обозначение производной (обозначение Лейбница). Если вместо $y(x)$ применяют символ $f(x)$, то пишут $\dfrac{df}{dx}$ вместо $f'(x)$.

2.3. Теоремы о конечных приращениях

Так называется группа теорем, связывающих приращение дифференцируемой функции на некотором интервале $[a,b]$ со значениями её производной внутри этого интервала. Эти теоремы служат инструментом для приложений такого “локального” понятия, как дифференцируемость к исследованию ”глобальных” свойств функции, т.е. особенностей её поведения на всем интервале $[a,b]$. Указанные приложения будут рассмотрены в следующих разделах.

Теорема Ролля. (Мишель Ролль, 1652 – 1719). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) $f(x)$ *непрерывна на интервале* $[a,b]$;

б) $f(x)$ *дифференцируема на интервале* $[a,b]$;

в) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ *такая, что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Из условия а) следует, что $f(x)$ принимает на $[a,b]$ свои наибольшее и наименьшее значения. Если эти значения принимаются ею на концах интервала, то в силу условия в) $f(x) =$ *const* на $[a,b]$, и теорема доказана. Поэтому рассмотрим случай, когда наибольшее значение принимается функцией $f(x)$ в некоторой точке $c \in (a,b)$. В силу условия б): $f(x) - f(c) = f'(c)(x-c) + o(x-c)$ при $x \to c$. Если $f'(c) \neq 0$, то

$f(x)-f(c)=f'(c)(x-c)\left[1+o(1)\right]$ при $x \to c$. Когда значения x близки к c, выражение в квадратных скобках положительно. Отсюда вытекает, что знак разности $f(x) - f(c)$ меняется при переходе x через значение c. Следовательно, $f(c)$ не может быть наибольшим значением функции $f(x)$ на $[a,b]$. Итак, $f'(c)=0$. Аналогично рассматривается случай, когда внутри $[a,b]$ принимается наименьшее значение функции f. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля. Если график функции $f(x)$ есть непрерывная кривая, соединяющая точки с абсциссами $x=a, x=b$ и одинаковыми ординатами y (рис. 1), и если в каждой точке графика существует касательная к нему, то на графике имеется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

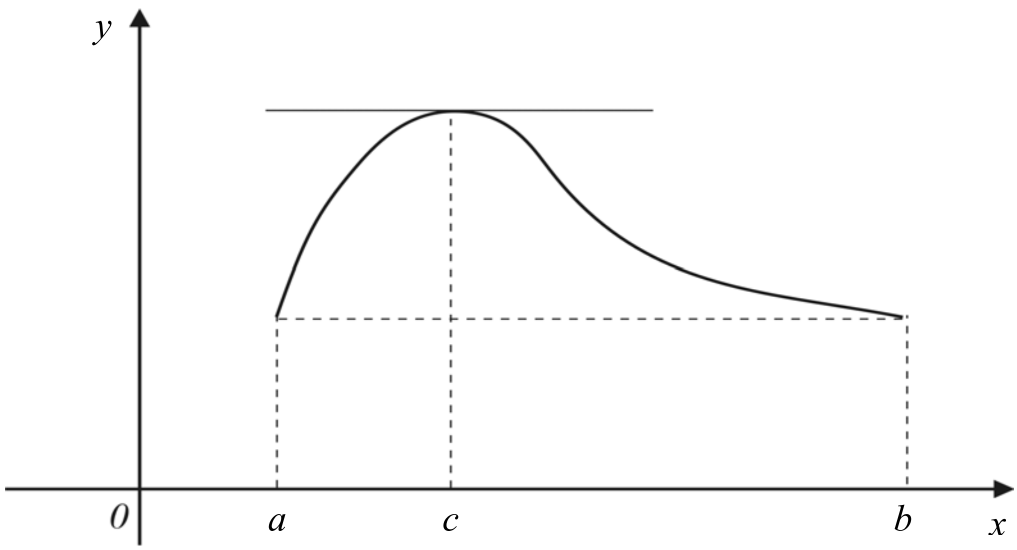


Рис. 1. Геометрическая интерпретация теоремы Ролля.

Кинематическая интерпретация: уходя в момент времени $x = a$ по прямолинейной дороге (ось Оy) и желая вернуться в исходный пункт в момент $x = b$, следует сделать хотя бы одну остановку в пути.

Следующее утверждение обобщает теорему Ролля.

Теорема Лагранжа (Жозеф Луи Лагранж, 1736 – 1813). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям пунктов* а) *и* б) *предыдущей теоремы. Тогда найдется хотя бы одна точка* $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию по формуле $F(x) = f(x) + \lambda(b - a)$, где константу λ подберём так, чтобы $F(x)$ удовлетворяла условиям теоремы Ролля. Очевидно, надо положить $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, после чего будем иметь $F(x) = f(x) + \left[f(b)-f(a)\right]\dfrac{x-a}{b-a}$. В силу теоремы Ролля существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, что и требуется доказать.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа. На графике функции $f(x)$ найдется точка, касательная в которой к графику параллельна хорде, соединяющей концы графика (рис. 2).

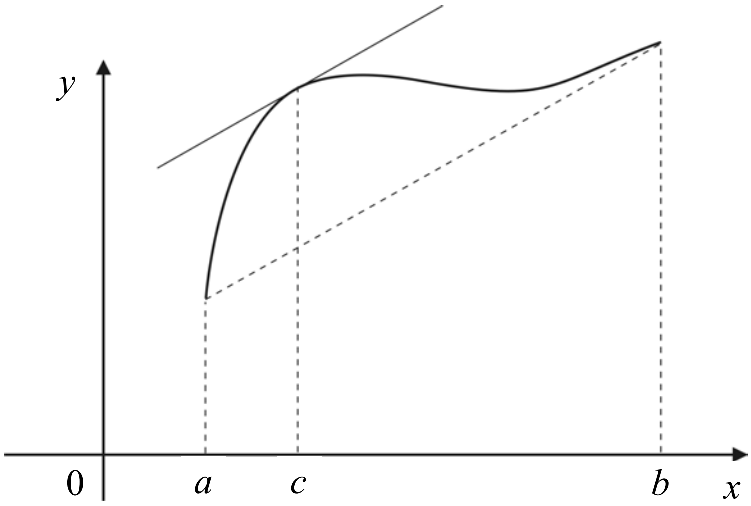


Рис.2. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа.

Кинематическая интерпретация: при движении точки по прямой в течение интервала времени $[a,b]$, в некоторый момент времени c мгновенная скорость равна средней скорости за время $b-a$.

Ещё более общей является следующая теорема.

Теорема Коши. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям*:

а) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на интервале* $[a,b]$;

б) $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на интервале* (a,b);

в) $g'(x) \neq 0$ *на интервале* (a,b).

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad . \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что $g(b) \neq g(a)$ (В противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка $c \in (a,b)$, для которой $g'(c) = 0$, что противоречит условию в)).

Построим функцию $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$, которая удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля. Для этого нужно, чтобы $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$, т.е.

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

В силу теоремы Ролля найдётся точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

что и требовалось.

Одним из следствий теоремы Коши являются так называемые ***правила Лопиталя*** (Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь, 1661 – 1704). Первое из них позволяет во многих случаях вычислять пределы отношений $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ в тех случаях, когда $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. имеет место *неопределённость вида* $\dfrac{0}{0}$. Второе правило применяется для *неопределённостей вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$, т.е. при $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ ($x \to x_0$).

Первое правило Лопиталя.

а) Предположим, что наряду с функцией $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в окрестности точки x_0 существует функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, и что её предел при $x \to x_0$ известен. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3}$$

Доказательство. Если $f(a) = f(a) = 0$, то по формуле Коши запишем для x, близкого к x_0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c лежит между x и x_0. Ясно, что при $x \to x_0$ имеем $c \to x_0$, поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, что и требовалось доказать.

Может случиться, что $f(x_0)$ (или $g(x_0)$) не определено. Тогда следует искусственно доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = 0$. Условия применения формулы Коши от этого не нарушаются.

б) Правило Лопиталя (3) остаётся в силе, если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ бесконечно велико при $x \to x_0$. Просто обе части равенства (3) будут при этом означать ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$).

Кроме того, правило (3) годится и для вычисления односторонних пределов в точке x_0.

в) Наконец, правило остаётся в силе для вычисления предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to \infty$ (или $x \to -\infty$, или $x \to +\infty$). Это легко проверить, вводя новую переменную $z = 1/x$. Тогда

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f(1/z)}{g(1/z)}$$

и функции $f(1/z)$, $g(1/z)$ удовлетворяют условиям пункта а) при $z \to 0$.

Второе правило Лопиталя внешне выглядит точно так же, как и описанное выше (формула (3) и аналогичные формулы для других направлений перехода к пределу), но применяется для раскрытия *неопределённости вида* $\frac{\infty}{\infty}$, т.е. в случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно велики. Его легко обосновать, заменяя функции $f(x)$ и $g(x)$ функциями $1/f(x)$ и $1/g(x)$, соответственно, и применяя к последним первое правило Лопиталя.

ПРИМЕР 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^x}{-\dfrac{1}{e-x}+1} = \dfrac{2e}{e-1}$.

ПРИМЕР 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{1-2x^3}{\sqrt{2x-x^4}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right):\left(-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)\right] = \frac{16}{9}.$$

ПРИМЕР 3.

$$\lim_{x\to +0}(x\ln x) = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

ПРИМЕР 4.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty.$$

2.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале I. Тогда её производная $f'(x)$ есть функция, заданная на I, и можно рассматривать вопрос о её дифференцировании. *Производная этой производной называется* ***второй производной*** *функции* $f(x)$, *или* ***производной второго порядка*** *этой функции и обозначается* $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \tag{1}$$

Аналогично определяется ***производная любого порядка*** $n = 3, 4, \ldots$ функции $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \tag{2}$$

Производной нулевого порядка функции $f(x)$ называют саму эту функцию. Таким образом, формула (2) справедлива при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Функцию $f(x)$, имеющую на интервале I все производные до порядка n включительно, называют ***n раз дифференцируемой*** на этом интервале. Если, к тому же, $f^{(n)}(x)$ непрерывна на интервале I (а, значит, непрерывны и все производные более низкого порядка), то говорят, что $f(x)$ ***n раз непрерывно дифференцируема на I.***

Очевидно, *все элементарные функции бесконечно дифференцируемы в своих областях определения, т.е. имеют там производные всех порядков.*

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ (рис. 1).

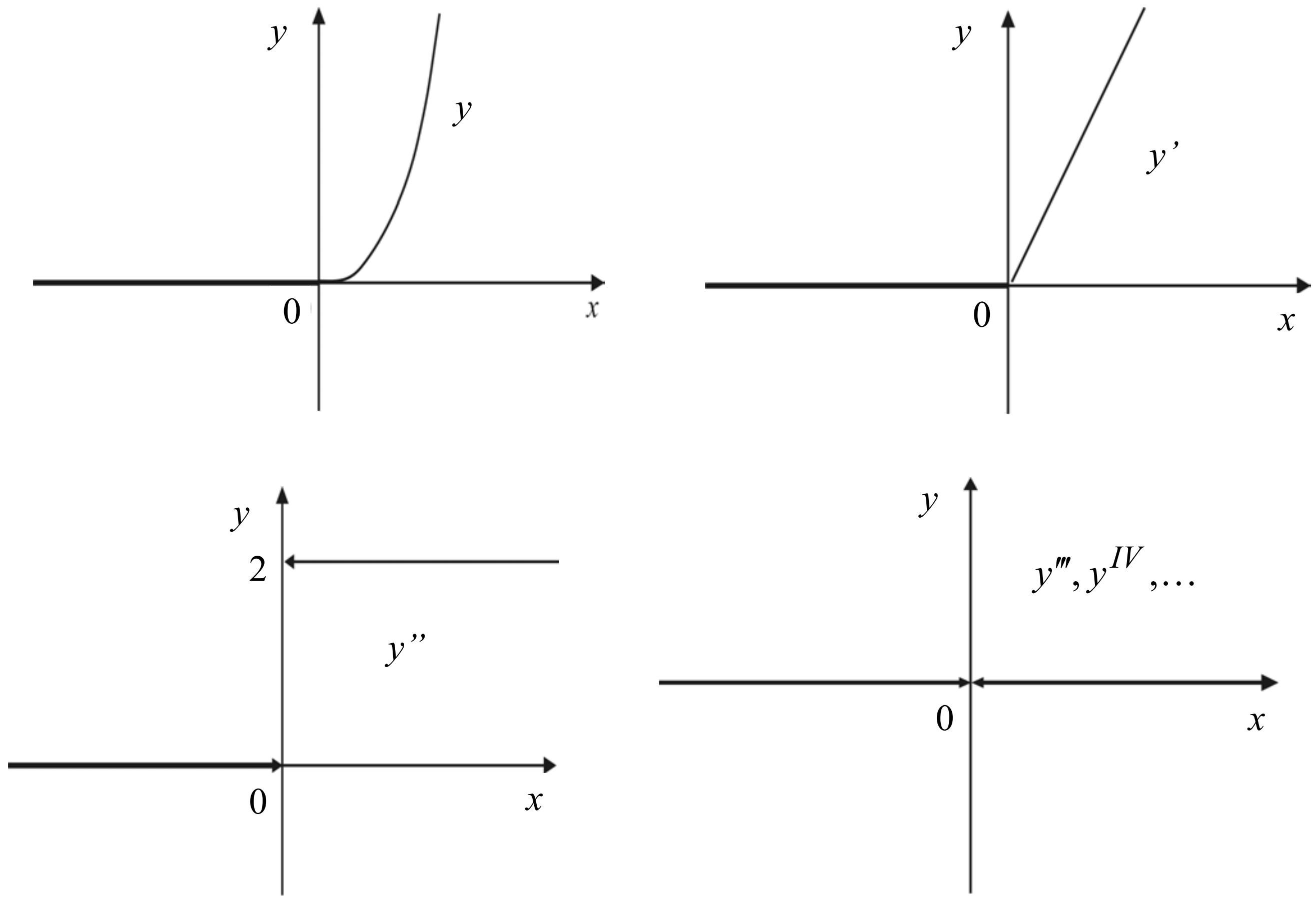


Рис. 1. К примеру 1.

При $x < 0$ имеем $y'(x) = 0$ (производная константы). При $x > 0$ получается $y'(x) = 2x$ (производная степенной функции). При $x = 0$ производную можно вычислить по определению:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^2-0}{x} = 0, \\ \lim\limits_{x\to-0} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{0-0}{x} = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x} = 0 = y'(0)$$

Таким образом, $y'(x)$ существует и непрерывна при всех x. Аналогично вычисляя $y''(x)$, находим

$$y''(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases},$$

а при $x = 0$ вторая производная не существует, ибо

$$\lim_{x\to -0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}\neq \lim_{x\to +0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}.$$

Итак, в данном примере функция $y\,(x)$ лишь один раз непрерывно дифференцируема во всей области определения.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ n раз дифференцируемы при некотором x, то тем же свойством обладают функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$, причём*

$$\left[f(x)+g(x)\right]^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Последнее соотношение называется ***формулой Лейбница.*** **(**Напомним, что $C_n^k=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэфициенты, и по определению $0! = 1$).

Доказательство первой формулы очевидно. Формула же Лейбница выводится методом индукции. Для $n = 1$ она, конечно, верна. Если она верна для некоторого n, то для $n + 1$ имеем:

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n+1)}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{i=1}^{n+1}C_n^{i-1}f^{(n-i+1)}(x)g^{(i)}(x)=$$

$$=C_n^0 f^{(n+1)}(x)g(x)+\sum_{k=1}^{n}\left[C_n^k+C_n^{k-1}\right]f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+C_n^n f(x)g^{(n+1)}(x).$$

Поскольку $C_n^0 = C_{n+1}^0, \quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, то

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x),$$

что и требуется доказать.

Заметим, что общая формула для *n*-ой производной отношения двух функций оказывается настолько громоздкой, что её практичность полностью теряется.

Вторым дифференциалом, *или* ***дифференциалом второго порядка****, функции y = f (x) называется дифференциал её дифференциала, рассматриваемого как функция от x при постоянном приращении dx независимой переменной*:

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)(dx)^2$$

или, окончательно,

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 . \tag{3}$$

Аналогично определяется ***дифференциал*** *любого* ***порядка n*** *функции f (x)*:

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) = f^{(n)}(x)(dx)^n . \tag{4}$$

Последняя формула позволяет использовать для *n*-ой производной функции $f(x)$, кроме обозначения $f^{(n)}(x)$, ещё и обозначение $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ (или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, если функция обозначается $y(x)$). Для краткости условливаются не ставить в скобки dx в знаменателе.

Мы видели ранее, что непрерывную в точке x_0 функцию $f(x)$ можно локально (в окрестности точки x_0) аппроксимировать константой, т.е. многочленом нулевой степени:

$$f(x) = f(x_0) + o(1), \quad (x \to x_0) \tag{5}$$

Ошибка такой аппроксимации стремится к нулю при $x \to x_0$.

Далее, функцию $f(x)$, дифференцируемую в точке x_0, можно аппроксимировать в окрестности этой точки многочленом первой степени:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad (x \to x_0) \tag{6}$$

с ошибкой, стремящейся к нулю при $x \to x_0$ быстрее, чем $x - x_0$.

Формулы (5) и (6) оказываются частными случаями, причём простейшими, следующего общего утверждения:

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некотором интервале* I *числовой оси и имеет в точке* $x_0 \in I$ *все производные до порядка* n *включительно. Тогда для всех* $x \in I$, *достаточно близких к* x_0, *имеет место следующая* ***формула Тейлора*** (Брук Тейлор, 1685 – 1731):

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{7}$$

в которой

а) $T_n(x)$ *есть многочлен степени* n, *значение которого, так же, как и значения его производных до порядка* n *включительно в точке* x_0, *совпадают с соответствующими значениями функции* $f(x)$, *т.е.*

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0); \tag{8}$$

б) *Функция* $R_n(x)$, *называемая* ***n-ым остаточным членом*** (***или n-ым остатком***) *формулы Тейлора, определяется равенством*

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right), \quad (x \to x_0). \tag{9}$$

Доказательство. Сначала убедимся, что свойства (8) действительно определяют, причём однозначно, многочлен степени n. Будем искать его в виде

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n \tag{10}$$

К такому виду можно привести любой многочлен степени n, записанный в стандартной форме – по степеням x. Для этого следует ввести переменную $t = x - x_0$, подставить в многочлен вместо x сумму $x_0 + t$, выполнить положенные возведения в степень этой суммы и расположить результаты по степеням t.

Полагая в (10) $x = x_0$ и используя первое условие (8), получаем $a_0 = f(x_0)$. Дифференцируя (10), снова полагая $x = x_0$ и используя второе условие (8), находим $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая аналогичным образом, после k-го дифференцирования и подстановки $x = x_0$ в его результат, имеем $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Заканчивается эта процедура после n - го дифференцирования.

В результате многочлен $T_n(x)$ определяется однозначно и имеет вид:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \tag{11}$$

Теперь, в соответствии с условием теоремы, надо доказать, что

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right), \quad (x \to x_0) \tag{12}$$

Для этого рассмотрим отношение $\dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n}$. К вычислению его предела при $x \to x_0$ применим $(n-1)$ раз правило Лопиталя, учитывая при этом условие (8):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_n{}'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n{}^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \tag{13}$$

Поскольку $f^{(n)}(x_0)$ существует, все производные функции $f(x)$ до порядка $n-1$ существуют в некоторой окрестности точки x_0, и в этой окрестности писать соотношения (13) можно. Числитель последнего отношения преобразуем с учетом дифференцируемости его в точке x_0 и условий (8):

$$f^{(n-1)}(x) - T_n{}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) - T_n{}^{(n-1)}(x_0) +$$
$$+\left[f^{(n)}(x_0) - T_n{}^{(n)}(x_0)\right](x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)$$

при $x \to x_0$.

После этого последний предел в (13) оказывается равным нулю, что и требовалось.

Итак, **формула Тейлора** (7) доказана. В развёрнутом виде она записывается так:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right), \qquad (x \to x_0) \end{aligned}} \tag{14}$$

Важный частный случай получается, если положить $x_0 = 0$. *Тогда формула Тейлора* (14) *принимает вид:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + o\left(x^n\right), \quad (x \to 0) \tag{14}$$

и называется ***формулой Маклорена*** (Колен Маклорен, 1698 – 1746). Она менее громоздка. Рассмотрим несколько примеров разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена. Читатель легко проверит их справедливость, вычисляя последовательные производные разлагаемых функций в нуле:

$$\boxed{\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)\\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\\
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)\\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)\\
&(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)
\end{aligned}} \tag{15}$$

В случае необходимости использовать общую формулу Тейлора (14) с $x_0 \neq 0$ можно зачастую упростить выкладки, сводя дело к формуле Маклорена. Для этого следует ввести новую независимую переменную $t = x - x_0$. Тогда разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 сведётся к разложению функции $\tilde{f}(t) = f(x_0 + t)$ в окрестности точки $t = 0$.

ПРИМЕР 2. Разложить по формуле Тейлора функцию $\cos x$ в окрестности точки $x_0 \neq 0$. Имеем, полагая $t = x - x_0$,

$$\cos x = \cos\left[x_0 + t\right] = \cos x_0 \cos t - \sin x_0 \sin t =$$

$$= \cos x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o\left(t^{2k+1}\right)\right] - \sin x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2k+2}\right)\right] =$$

$$= \cos x_0 - \sin x_0 \cdot t - \frac{\cos x_0}{2!} t^2 + \frac{\sin x_0}{3!} t^3 + \frac{\cos x_0}{4!} t^4 - \frac{\sin x_0}{5!} t^5 - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\cos x_0}{(2n)!} t^{2n} - (-1)^n \frac{\sin x_0}{(2n+1)!} t^{2n+1} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Осталось заменить t на $x - x_0$, чтобы получить искомое разложение.

Этот пример иллюстрирует выгоду не только от использования формулы Маклорена, но и от наличия “под рукой” определённого запаса уже известных разложений для самых “ходовых” функций. Особенно полезны в этом смысле стандартные разложения (15).

ПРИМЕР 3. Разложить по формуле Маклорена функцию $e^{\sqrt{1+x}}$ до члена порядка x^3 включительно.

Сначала разложим функцию $u(x) = \sqrt{1+x}$ с помощью примера 6:

$$u(x) = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3 + o\left(x^3\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$

Теперь используем пример 2:

$$e^{\sqrt{1+x}} = e \cdot e^{x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right)} = e\{1 + \left[x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right)\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\left[x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right)\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right)\right]^3 +$$

$$+o\left(\left[x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right)\right]^3\right)\} = e\{1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o\left(x^3\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[x^2/4 - x^3/8 + o\left(x^3\right)\right] + \frac{1}{6}\left[x^3/8 + o\left(x^3\right)\right] + o\left(x^3\right)\} = e\left\{1 + x/2 + 1/48\,x^3 + o\left(x^3\right)\right\}$$

Окончательно: $e^{\sqrt{1+x}} = e + \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{48}x^3 + o\left(x^3\right).$

Вернёмся от примеров к теории и отметим, что если о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 известно больше, чем это предполагается условиями теоремы 2, то, соответственно, можно получить и больше информации о поведении остатка $R_n(x)$. Пусть функция $f(x)$ имеет производные не только до порядка n, а до порядка $n + 1$ включительно, причём не только в точке x_0, но и в некоторой её окрестности. Тогда остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}, \tag{16}$$

где x – произвольная точка области определения $f(x)$, лежащая в указанной окрестности, а c – некоторая точка, расположенная строго между x_0 и x (c зависит, строго говоря, от x_0 и x).

Эта формула позволяет не только знать, что относительная ошибка от замены функции её многочленом Тейлора стремится к нулю при $x \to x_0$, но и дать числовую оценку этой ошибки в заданной окрестности числа x_0.

Для доказательства формулы (16) преобразуем отношение $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, т.е. $\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ по формуле Коши несколько раз, используя условия (8):

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\left[f(x)-T_n(x)\right]-\left[f(x_0)-T_n(x_0)\right]}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}=\frac{f'(c_1)-T_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n}=$$

$$=\frac{\left[f'(c_1)-T_n'(c_1)\right]-\left[f'(x_0)-T_n'(x_0)\right]}{(n+1)\left[(c_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n\right]}=\frac{f''(c_2)-T_n''(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\ldots=\frac{f^{(n)}(c_n)-T_n^{(n)}(c_n)}{(n+1)n\ldots\cdot 3\cdot 2(c_n-x_0)},$$

где точка c_1 лежит между x_0 и x, точка c_2 – между x_0 и c_1, …, точка c_n – между x_0 и c_{n-1}. Теперь применим формулу Лагранжа на интервале $\left[x_0, c_n\right]$ к функции $f(x)-T_n(x)$ для преобразования числителя последнего выражения. В результате функция $\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ примет вид

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(c)(c_n-x_0)}{(n+1)!(c_n-x_0)}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

где c лежит между x_0 и c_n, т.е. между x_0 и x, что и требовалось.

Итак, мы располагаем теперь выражениями (9) и (16) для ***остаточного члена*** $R_n(x)$ ***формулы Тейлора***. Первое из них называется ***формой Пеано*** (Джузеппе Пеано, 1858-1932), а второе – ***формой Лагранжа*** остаточного члена.

Для иллюстрации преимущества формы Лагранжа рассмотрим пример на применение формулы Тейлора к приближённому вычислению значений функции. Пусть требуется составить таблицы значений функций $\cos x, \sin x$ (или компьютерную программу, которая вычисляла бы эти значения). Прежде всего, ясно, что достаточно уметь вычислять указанные значения при $0 \le x \le \pi/4$: если x выходит за пределы этого интервала, можно воспользоваться формулами приведения. В интервале же $0 \le x \le \pi/4$ будем использовать формулы Маклорена из примеров 3 и 4. Каким надо взять n, чтобы остаточный член не превосходил заданной точности вычислений, скажем 10^{-4}? Ответ на этот вопрос даёт форма Лагранжа (16) остаточного члена. Если $f(x) = \cos x$, то $f^{(k)}(c)$ при любом c не превышает по модулю единицы. Поэтому будет верна оценка

$$\left|R_{2n}(x)\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}(\pi/4)^{2n+2}.$$

Требуя, чтобы эта величина не превосходила 10^{-4}, находим методом перебора (n = 1, 2, 3, …), что достаточно взять n = 3, т.е. использовать приближённую формулу

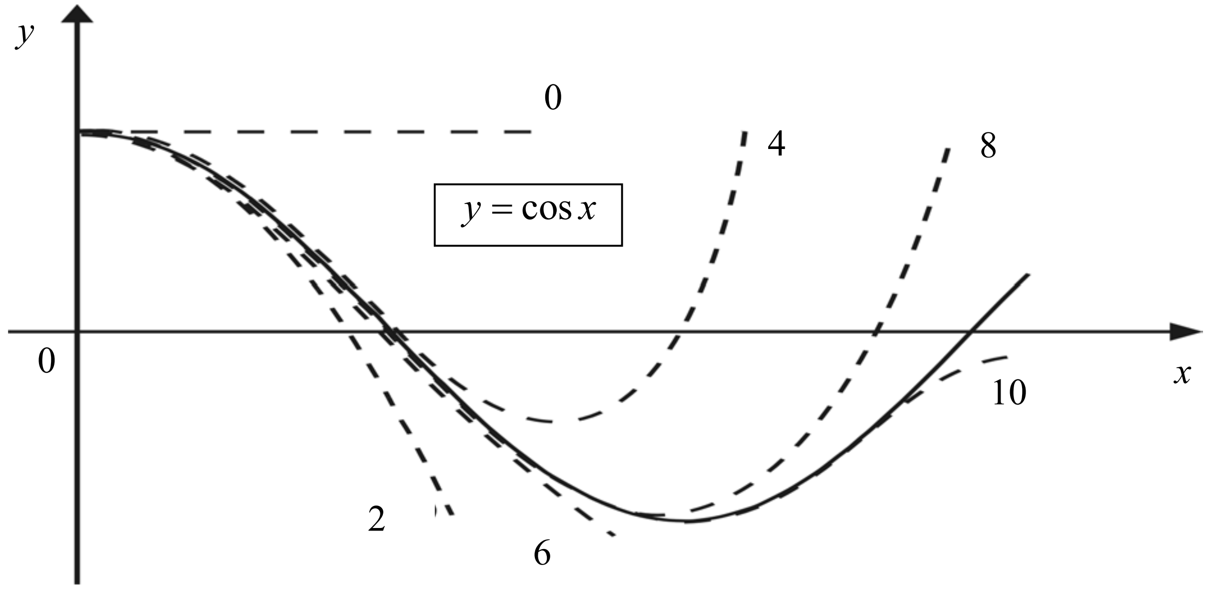
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Совершенно аналогично приходим к приближённой формуле для $\sin x$, обеспечивающей ту же точность 10^{-4} при всех значениях x из интервала $0 \le x \le \pi/4$:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12}.$$

На рис. 2 показан характер приближения функций $\cos x$, $\sin x$ их многочленами Тейлора в окрестности точки x_0 = 0. Числа на рисунке показывают степень многочлена, которым приближена соответствующая функция.

Формула Тейлора – “венец” дифференциального исчисления. В ней сконцентрировано всё, что может сказать это исчисление о функции, имеющей в некоторой точке x_0 несколько (n) производных. А именно, эта функция ведёт себя вблизи x_0 как многочлен степени n со всеми вытекающими отсюда последствиями, как аналитическими, так и вычислительными.



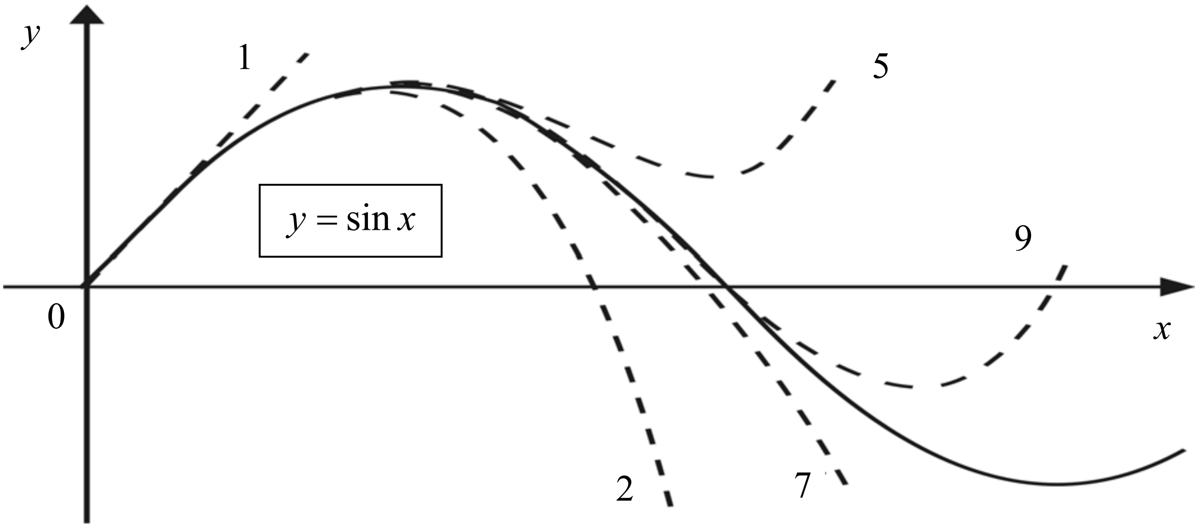


Рис.2. Характер приближения функций $\cos x$ (вверху) и $\sin x$ (внизу) их многочленами Тейлора вблизи точки $x_0 = 0$.

Теоретические вопросы к главе 2.

1. Дать определение производной функции в точке.
2. Дать определение дифференцируемости функции в точке и диференциала функции. Показать, что дифференцируемость функции в точке эквивалентна существованию производной в этой точке.
3. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.
4. Геометрический смысл производной и дифференцируемости.

5. Вывести формулы для производных следующих функций:

$$y = const, \quad y = x^{\alpha}, \quad y = e^{x}, \quad y = \cos x, \quad y = \sin x.$$

6. Что такое односторонняя производная и односторонняяя касательная к графику функции?
7. Сформулировать и доказать теорему о производной сложной функции.
8. Найти производную функции $y = a^{x}, \quad (a = const)$.
9. Сформулировать и обосновать теорему о производной обратной функции.
10. Найти производные функций $y = \log_a x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arcsin x$.
11. Дать определение функции, заданной параметрически. Пояснить механический смысл параметрического задания функции.
12. Сформулировать и доказать теорему о производной функции, заданной параметрически.
13. В чём состоит метод логарифмического дифференцирования?
14. Дать формулировку теоремы Ролля о конечных приращениях. Указать геометрическую и механическую интерпретации этой теоремы.
15. Сформулировать и доказать теорему Лагранжа о конечных приращениях. Дать её геометрическую и механическую интерпретации.
16. В чём состоят правила Лопиталя?
17. Дать определение производной любого порядка $n = 1, 2, 3, \ldots$ функции $f(x)$.
18. Сформулировать теорему об n-кратном дифференцировании суммы и произведения функций.
19. Дать определение дифференциала порядка $n = 2, 3, \ldots$ функции и формулу для его вычисления через производные этой функции.
20. Сформулировать и доказать теорему о разложении функции $f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
21. Что такое формула Маклорена? Разложить по этой формуле функции $e^{x}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^{\alpha}$.
22. Что такое остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа? Каково преимущество формы Лагранжа перед формой Пеано?

Задачи к главе 2.

1. Существует ли производная $f^{/}(0)$, если

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x\neq 0 \\ 0\,, & \text{при } x=0 \end{cases} \qquad ?$$

2. Является ли производная функции $f(x)$ непрерывной в точке $x = 0$, если

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x\neq 0 \\ 0\,, & \text{при } x=0 \end{cases} \qquad ?$$

В следующих задачах найти $f'(0)$, исходя из определения производной.

3. $f(x)=\begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin\left(\frac{3}{5x}\right)-1}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln(1+3x^2\cos\frac{2}{x})}-1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$

В следующих задачах написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

7. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ x_0=-2$

8. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{3},\ x_0=3$

9. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\ x_0=1$

10. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\ x_0=1$

11. $y=\dfrac{x^2}{10}+3,\ x_0=2$

12. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=4$

Найти дифференциал dy.

13. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1)$

14. $y = (\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}) \cdot e^{2\sqrt{x-1}}$

15. $y = \ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}$

16. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1\right|$

17. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$

17. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

19. $y = x^7,\ \ x = 2{,}002$

20. $y = \sqrt{4x-3},\ \ x = 1{,}78$

21. $y = \sqrt{x^3},\ \ x = 0{,}98$

22. $y = x^5,\ \ x = 2{,}997$

23. $y = \sqrt[3]{x^2},\ \ x = 1{,}03$

24. $y = x^4,\ \ x = 3{,}998$

Найти производную.

25. $y = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2}$

26. $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

27. $y = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

28. $y = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x+1}$

29. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^2}$

30. $y = \dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$

Найти производную.

31. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$

32. $y = e^{\sin x}(x - \dfrac{1}{\cos x})$

33. $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}$

34. $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$

35. $y = \dfrac{e^x}{2}\left[(x^2 - 1)\cos x + (x-1)^2 \sin x\right]$

36. $y = -\dfrac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$

Найти производную.

37. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$

38. $y=\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})$

39. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$

40. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$

41. $y=\ln\ln\sin(1+\dfrac{1}{x})$

42. $y=\ln\ln^3\ln^2 x$

Найти производную.

43. $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$

44. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

45. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$

46. $y=\dfrac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\dfrac{\ln(1-4x^2)}{8}$

47. $y=(x+2\sqrt{x}+2)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\sqrt{x}$

48. $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x)$

Найти производную.

49. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$

50. $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$

51. $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}(x/4)}$

52. $y=x^{e^{\cos x}}$

53. $y=x^{29^x}\cdot 29^x$

54. $y=(\cos 2x)^{\ln\cos(x/4)}$

Найти производную.

55. $y=\dfrac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\dfrac{1}{2x-1}$

56. $y=\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$

57. $y=\arcsin e^{-4x}+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{2x}-1})$

58. $y=\ln(5x+\sqrt{25x^2+1})-\sqrt{25x^2+1}\cdot\operatorname{arctg}5x$

59. $y=\dfrac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$

60. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+3}$

Найти производную.

61. $y=\dfrac{4^x((\ln 4)\sin 4x-4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}$

62. $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

63. $y=x-\ln\left(1+e^x\right)-2\cdot e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}$

64. $y=\dfrac{5^x\left(\sin 3x\cdot\ln 5-3\cos 3x\right)}{9+\ln^2 5}$

65. $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$

66. $y=2\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}+3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

Найти производную функции $y\left(x\right)$, заданной параметрически.

67. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

68. $\begin{cases} x=t\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$

69. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$

70. $\begin{cases} x=\ln\left(1-t^2\right) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

71. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1} \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

72. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}} \\ y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t+\ln\cos t \end{cases}$

Написать уравнение касательной к графику функции $y(x)$, заданной параметрически, в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

73. $\begin{cases} x = t(1-\sin t) \\ y = t\cos t \end{cases}$ $(t_0 = 0)$

74. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$ $(t_0 = 2)$

75. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $(t_0 = \dfrac{\pi}{4})$

76. $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ $(t_0 = 1)$

77. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ $(t_0 = \dfrac{\pi}{4})$

78. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = a^t \end{cases}$ $(t_0 = 0)$

В следующих задачах найти производную n-го порядка.

79. $y = a^{2x+3}$

80. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$

81. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$

82. $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$

83. $y = \lg(2x+7)$.

84. $y = \log_3(x+5)$

В следующих задачах найти производную указанного порядка.

85. $y = \dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y''' = ?$

86. $y = x\ln(1-3x)$, $y^{(IV)} = ?$

87. $y = \left(x^2+3x+1\right)e^{3x+2}$, $y^{(V)} = ?$

88. $y = (5x-8)\cdot 2^{-x}$, $y^{(IV)} = ?$

89. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, $y^{(IV)} = ?$

90. $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{(V)} = ?$

В следующих задачах найти производную второго порядка y'' функции, заданной параметрически.

91. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

92. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

93. $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$

94. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2} \end{cases}$

95. $\begin{cases} y = \sqrt[3]{\mathrm{sh}^2 t} \\ x = 2(t - \sin t) \end{cases}$

96. $\begin{cases} x = \mathrm{arc\,tg}\, t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

В следующих задачах показать, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (∗).

97. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$, $\quad 8xy' - y = \dfrac{-1}{y^3 \sqrt{x+1}}$ (∗).

98. $y = \left(x^2 + 1\right)e^{x^2}$, $\quad y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ (∗).

99. $y = \dfrac{2x}{x^3 + 1} + \dfrac{1}{x}$, $\quad x\left(x^2 + 1\right)y' + \left(2x^3 - 1\right)y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$ (∗).

100. $y = e^{x + x^2} + 2e^x$, $\quad y' - y = 2xe^{x + x^2}$ (∗).

101. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x + x}}$, $\quad 2(\sin x)\, y' + y \cos x = y^3 (x \cos x - \sin x)$ (∗).

102. $y = -x \cos x + 3x$, $\quad xy' = y + x^2 \sin x$ (∗).