

Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Д.Ю. Ханукаева

**ЛЕКЦИИ И УПРАЖНЕНИЯ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ**
для специальности «Прикладная математика»

Москва 2012

УДК 512.64

X33

Ханукаева Д.Ю.

X33 Лекции и упражнения по линейной алгебре. Для специальности «Прикладная математика». – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012. – 100с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика». В нем изложены те разделы курса линейной алгебры, которые не входят в курс высшей математики для других специальностей. Теоретический материал сопровождается подборкой упражнений, предназначенных для практических занятий, а также задачами для самостоятельного решения.

Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим занятия в потоке «Прикладная математика». Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

Доцент кафедры высшей математики МФТИ(ГУ) И.А. Чубаров

Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
И.В.Петрова

Учебное издание

Компьютерная верстка: Д.Ю. Ханукаева

© Ханукаева Д.Ю., 2012

© Издательство «Нефть и газ»

РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2012

Оглавление

Предисловие	2
Рекомендуемая литература	3
Глава 1. Линейные пространства	
Основные определения	4
Изоморфизм линейных пространств	13
Линейные подпространства	15
Сумма и пересечение подпространств	18
Глава 2. Линейные отображения	
Основные понятия	27
Собственные векторы линейных операторов	38
Глава 3. Евклидовы и унитарные пространства	
Основные определения	47
Координатная запись скалярного произведения. Матрица Грама	54
Ортогональные системы векторов	59
Ортогональные подпространства и дополнения	63
Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств	69
Сопряженные, самосопряженные, ортогональные и унитарные операторы	71
Глава 4. Линейные, билинейные и квадратичные формы	
Линейные формы (функции)	83
Билинейные формы	87
Квадратичные формы в евклидовом пространстве	89

Предисловие

В связи с введением новых федеральных государственных образовательных стандартов студенты, обучающиеся по направлению «Прикладная математика», испытывают нехватку учебной литературы. Это связано с тем, что курсы дисциплин для этой специальности отличаются как от курсов для технических специальностей, так и от академических университетских программ.

Предлагаемое учебное пособие призвано отчасти заполнить образовавшийся пробел. Оно основано на курсе лекций, читавшемся автором на потоке «Прикладная математика» Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина в течение нескольких лет. В данное пособие вошли именно те разделы курса линейной алгебры, которые не изучаются на других потоках и не освещаются в учебной литературе для технических вузов. Надо отметить, что академический курс линейной алгебры отнюдь не исчерпывается предлагаемым материалом. Более полное и глубокое изложение можно найти в фундаментальных учебниках [1-6].

Данное пособие состоит из четырех глав и не имеет деления на отдельные лекции. Теоретический материал разбит на небольшие смысловые части, которые сопровождаются упражнениями, предназначенными для практических занятий с преподавателем. Помимо упражнений предлагаются задачи для самостоятельного решения студентами. Большая часть задач заимствована из задачников [7,8].

Данное пособие может использоваться студентами для самостоятельной работы, как в течение семестра, так и при подготовке к экзамену по курсу линейной алгебры. Предлагаемый материал может пригодиться не только студентам, изучающим линейную алгебру, но также и магистрантам, аспирантам и инженерам, желающим восстановить свои знания в этой области. Возможно, и преподаватели, ведущие занятия в потоке «Прикладная математика», найдут здесь что-то полезное.

Рекомендуемая литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - изд. 2-е, стереотипное. – СПб.: Лань, 2009. – 512с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - изд. 12-е, исправленное. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. - изд. 6-е, исправленное. – М.: Добросвет, КДУ, 2009. – 320 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - изд. 6-е, стереотипное. – М.: Физматлит, 2010. – 280 с.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трех частях. – М.: МЦНМО, 2009.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - изд. 16-е, стереотипное. – М.: Лань, Физматкнига, 2007. – 432 с.
7. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - изд. 3-е, исправленное. – СПб.: Лань, 2008. – 496 с.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - изд. 11-е, стереотипное. – СПб.: Лань, 2008. – 480с.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

<http://kvm.gubkin.ru/index.html>

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. Множество L элементов $x, y, z, \dots$ называется *линейным пространством*, если

1) каждому двум элементам x, y из L поставлен в соответствие элемент z из L , называемый их суммой $z = x + y$;

2) каждому элементу x из L и каждому числу α поставлен в соответствие элемент αx из L , называемый произведением элемента на число.

Эти операции и элементы должны удовлетворять аксиомам:

A1: $y + x = x + y$.

A2: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A3: Существует нулевой элемент $\theta \in L$: $x + \theta = x$.

A4: Для каждого элемента $x \in L$ существует противоположный элемент $-x \in L$: $x + (-x) = \theta$.

A5: $1 \cdot x = x$.

A6: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

A7: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

A8: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

ПРИМЕРЫ.

1) В аналитической геометрии перечисленными свойствами обладают векторы, поэтому часто элементы любого линейного пространства называют векторами.

2) В алгебре это строки, столбцы или целые матрицы.

3) В анализе это непрерывные на отрезке функции.

4) Совокупность непрерывных на отрезке функций и ограниченных числом M не образует линейного пространства (почему?).

Замечание. Если участвующие в определении числа вещественны, линейное пространство называют *вещественным*, если комплексные – *комплексным линейным пространством*. Если нужно подчеркнуть природу элементов линейного пространства, то для обозначения вещественного пространства используют букву R , для комплексного – C .

Теорема 1 (простейшие свойства линейных пространств).

1. $\theta!$; 2. $\forall x \quad (-x)!$; 3. $-\theta = \theta$; 4. $-(-x) = x$;
5. $0 \cdot x = \theta$; 6. $-1 \cdot x = -x$; 7. $\forall \alpha \quad \alpha \cdot \theta = \theta$.

Доказательство. 1. $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$;

$$2. -x_1 = -x_1 + \theta = -x_1 + (x - x_2) = (-x_1 + x) - x_2 = \theta - x_2 = -x_2;$$

$$3. -\theta = -\theta + \theta = \theta;$$

$$4. -(-x) = -(-x) + \theta = -(-x) - x + x = -(-x + x) + x = -\theta + x = x;$$

$$5. 0 \cdot x = 0 \cdot x + \theta = 0 \cdot x + x - x = (0 + 1)x - x = 1 \cdot x - x = x - x = \theta;$$

$$6. -1 \cdot x = -1 \cdot x + \theta = -1 \cdot x + x - x = (-1 + 1)x - x = 0 \cdot x - x = \theta - x = -x;$$

$$7. \alpha \cdot \theta = \alpha(0x) = (\alpha \cdot 0)x = 0 \cdot x = \theta. \blacksquare$$

Понятия линейной зависимости, линейной независимости и линейной комбинации векторов любого линейного пространства определяются точно так же, как для векторов и матриц.

Определение. Выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Линейная комбинация *нетривиальна*, если хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля (т.е. $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| > 0$). В противном случае линейная комбинация *тривиальна*.

Определение. Система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ называется *линейно зависимой*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору: $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ ($|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| > 0$).

Система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *линейно независима*, если из равенства нулевому вектору их линейной комбинации следует, что все коэффициенты в ней равны нулю.

ПРИМЕРЫ.

1) Нулевой вектор любого линейного пространства линейно зависим.

2) Ненулевой вектор любого линейного пространства линейно независим.

3) В пространстве столбцов высоты n система $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независима.

4) В пространстве многочленов одной переменной x линейно независима система $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots \forall n$.

5) В пространстве непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ линейно независима система $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

Определение. Линейное пространство называется *n -мерным*, если в нем существует n линейно независимых векторов и нет большего количества линейно независимых векторов, т.е. любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Иногда размерность линейного пространства записывают в виде нижнего или верхнего индекса рядом с буквой, обозначающей само линейное пространство: L_n, R_3, C_5 и т.п. Чаше для обозначения размерности пространства L используют значок $\dim L$.

По определению линейному пространству, состоящему из одного лишь нулевого вектора $\{\mathbf{0}\}$ приписывается нулевая размерность.

В примере 3) размерность пространства равна n , в примерах 4) и 5) пространства бесконечномерные. Пространство называется бесконечномерным, если для любого натурального n в нем найдется n линейно независимых векторов.

Определение. *Базисом* в n -мерном линейном пространстве называется любая упорядоченная совокупность из n линейно независимых векторов.

По определению n -мерного пространства базис в нем всегда существует.

Теорема 2 (о разложении вектора по базису).

Каждый вектор n -мерного линейного пространства L можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию его базисных векторов.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис в L ; присоединим к ним произвольный вектор $\mathbf{x}$ из L . Система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{x}$ не является линейно независимой по определению n -мерного линейного пространства. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору: $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n + \alpha \mathbf{x} = \mathbf{0}$, причем $\alpha \neq 0$, т.к. иначе система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ оказалась бы линейно зависимой и не была бы базисом.

Выразив $\mathbf{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \mathbf{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \mathbf{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \mathbf{e}_n$, получим требуемое разложение.

Докажем единственность. Пусть вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по базису двумя способами: $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n$. Вычтем из первого равенства второе, получим:

$\theta = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n$, откуда следует $\alpha_i = \beta_i$ в силу линейной независимости базисных векторов. ■

Определение. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис n -мерного линейного пространства. Представление произвольного вектора этого пространства в виде $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ называется *разложением вектора по базису*, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Из Теоремы 2 следует, что при заданном базисе координаты вектора определены однозначно, и каждый вектор n -мерного линейного пространства имеет ровно n координат. Из аксиом следует, что при сложении векторов их координаты складываются, при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число.

Если представить совокупность базисных векторов в виде строки

$$(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n), \text{ а координаты вектора в виде столбца } (\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \text{ то}$$

разложение вектора по базису можно записать в виде произведения строки на

столбец:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \xi_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e})(\xi).$$

Замечание. Фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно интерпретировать как координатные столбцы векторов линейного пространства. Более того, в силу линейной независимости ФСР она может выступать в роли базиса линейного пространства, которое образуют все решения системы уравнений.

ПРИМЕРЫ.

1) Множество векторов на плоскости и в пространстве – примеры двумерного и трехмерного линейного пространства; определение координат вектора совпадает с понятием координат вектора, введенном в аналитической геометрии.

2) Рассмотрим пространство, векторами которого являются системы из n чисел. Их можно представлять в виде столбцов высоты n . Такое пространство называется *арифметическим n -мерным пространством*. В самом деле, если взять столбцы единичной матрицы порядка n , то они, как известно, линейно независимы, а любой другой столбец высоты n раскладывается в их линейную комбинацию. Значит, эти столбцы могут быть базисом, он называется *стандартным*. Координатами любого другого вектора в этом базисе будут составляющие его числа.

3) Возьмем теперь векторы $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Они

являются линейно независимыми (почему?), значит, могут быть выбраны в качестве базиса.

Координаты $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ в этом базисе будут находиться из СЛАУ:

$$\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \xi_n \mathbf{e}_n = \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_1 + \xi_2 &= x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n &= x_n \end{aligned}$$

откуда $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2 - x_1$, $\xi_3 = x_3 - x_2$, $\xi_n = x_n - x_{n-1}$.

Сформулируем и докажем два вполне очевидных утверждения, которые будут весьма полезны в дальнейшем.

Утверждение 1. Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов линейно зависима.

Доказательство. Каждый из m векторов системы разложим по базису (по Теореме 2 координаты будут определены однозначно). Составим из координатных столбцов матрицу. Она будет иметь размер $m \times n$, а ранг ее не превосходит n . Значит, ее столбцы линейно зависимы, т.е. линейно зависимы m рассматриваемых векторов. ■

Утверждение 2. В n -мерном линейном пространстве любую систему из $k < n$ линейно независимых векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Присоединим к системе еще один вектор, который по ней не раскладывается. Если бы это нельзя было сделать, то пространство было бы k -мерным. Получаем систему из $k + 1$ линейно независимых векторов. Если $k + 1 < n$, процедуру повторяем, пока не дополним систему до базиса. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Является ли линейным пространством: а) пустое множество; б) множество, состоящее из одного нулевого элемента?

Ответ: а) нет; б) да.

2. Можно ли определить во множестве из двух элементов операции сложения и умножения на число так, чтобы это множество стало линейным пространством?

Ответ: нет

3. Доказать, что:

1) если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима;

2) если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима;

3) если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, то вектор $\mathbf{a}_0$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

4. Выяснить, является ли линейным пространством данное множество векторов из n -мерного пространства, и если является, найти его размерность:

1) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

2) множество векторов, первая координата которых равна 0;

3) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

4) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

5) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;

6) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;

7) множество векторов плоскости, по модулю не превосходящих 1;

8) множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Ответ: 1) Да, размерность равна 1; 2) да, размерность равна $n - 1$; 3) да, размерность равна $n - 1$; 4) нет; 5) да, размерность равна 1; 6) да, размерность равна 2; 7) нет; 8) при $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ линейное подпространство размерности 1, при остальных – нет.

5. Доказать, что множество матриц размера $m \times n$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти размерность и базис этого пространства.

Ответ: размерность mn ; базис образуют занумерованные в каком-нибудь порядке матричные единицы.

6. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n линейным пространством, и если является, найти его размерность:

- 1) множество матриц с нулевой первой строкой;
- 2) множество диагональных матриц;
- 3) множество верхних треугольных матриц;
- 4) множество вырожденных матриц.

Ответ: 1) да, размерность равна $n(n-1)$; 2) да, размерность равна n ; 3) да, размерность равна $n(n+1)/2$; 4) нет.

7. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейно пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

- 1) множество функций, непрерывных на $[a, b]$;
- 2) множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$;
- 3) множество функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$;
- 4) множество функций, ограниченных на $[a, b]$;
- 5) множество функций таких, что $\sup_{[a, b]} |f(x)| \leq 1$;
- 6) множество функций, неотрицательных на $[a, b]$;
- 7) множество функций таких, что $f(a) = 0$;
- 8) множество функций таких, что $f(a) = 1$;
- 9) множество функций таких, что $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$;
- 10) множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]$;
- 11) множество функций, монотонных на $[a, b]$.

Ответ: 1) да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет; 7) да; 8)-11) нет.

8. Доказать, что при любом натуральном n данное множество функций образует конечномерное линейное пространство; найти размерность и указать базис этого пространства:

- 1) множество многочленов степени не выше n ;

- 2) множество четных многочленов степени не выше n ;
- 3) множество нечетных многочленов степени не выше n ;
- 4) множество тригонометрических многочленов порядка не выше n , т.е. множество функций вида $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;
- 5) множество четных тригонометрических многочленов порядка не выше n ;
- 6) множество нечетных тригонометрических многочленов порядка не выше n ;
- 7) множество функций вида $f(t) = e^{\alpha t} (a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, где α – фиксированное действительное число.

Ответ: 1) размерность равна $n+1$; базис $1, t, t^2, \dots, t^n$. 2) размерность равна $[n/2]+1$; базис $1, t^2, \dots, t^{2k}$ ($k=[n/2]$). 3) размерность равна $[(n+1)/2]$; базис $t, t^3, \dots, t^{2k-1}$ ($k=[(n+1)/2]$). 4) размерность равна $2n+1$; базис: $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt$. 5) размерность равна $n+1$; базис: $1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt$. 6) размерность равна n ; базис: $\sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt$. 7) размерность равна $2n+1$; базис: $e^{\alpha t}, e^{\alpha t} \cos t, e^{\alpha t} \sin t, \dots, e^{\alpha t} \cos nt, e^{\alpha t} \sin nt$.

ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение. *Взаимно однозначным соответствием* элементов множеств R и R' называется такое соответствие, которое 1) каждому элементу из R сопоставляет один и только один элемент из R' ; и при котором 2) каждый элемент из R' соответствует одному и только одному элементу из R .

Определение. Линейные пространства L и $\tilde{L}$ называются *изоморфными*, когда между их векторами $\mathbf{x} \in L$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{L}$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если $\mathbf{x} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{y}}$, то

$$1) \mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}; \quad 2) \lambda \mathbf{x} \leftrightarrow \lambda \tilde{\mathbf{x}}.$$

Из определения изоморфизма следует, что линейно зависимым векторам из R соответствуют линейно зависимые векторы из R' , и наоборот. Поэтому размерности изоморфных пространств одинаковы, а пространства разной размерности не могут быть изоморфны друг другу.

Теорема 3 (об изоморфизме линейных пространств).

Линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.

Доказательство. Рассмотрим n -мерные пространства L и $\tilde{L}$. Введем базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$. Поставим в соответствие вектору $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ из L вектор с такими же координатами, но в $\tilde{L}$: $\tilde{\mathbf{x}} = x_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + x_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \tilde{\mathbf{e}}_n$. В силу однозначности разложения вектора по базису, числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ определены однозначно, а вместе с ними и вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ определен однозначно. Рассуждая аналогично в обратную сторону, установим, что построенное соответствие взаимно однозначное. Используя аксиомы и свойства линейных операций, устанавливаем $\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}$ и $\lambda \mathbf{x} \leftrightarrow \lambda \tilde{\mathbf{x}}$, что завершает доказательство изоморфизма данных пространств. ■

Вывод: природа элементов, составляющих линейное пространство, вторична, когда мы интересуемся его свойствами с точки зрения линейных операций. Главной характеристикой пространства является его размерность. Для каждой размерности найдется только одно линейное пространство, если условиться не различать изоморфные пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Определение. *Линейным подпространством* пространства L называется непустое подмножество L' векторов L , если 1) сумма любых векторов из L' принадлежит L' ; 2) произведение на число любого вектора из L' принадлежит L' .

Из определения линейного подпространства следует, что любое подпространство обязательно содержит нулевой вектор и противоположный к каждому входящему в него вектору.

Простейшими примерами являются нулевое подпространство и совпадающее с исходным; эти подпространства называются *несобственными подпространствами*. Более содержательные примеры – прямая на плоскости и в трехмерном пространстве, плоскость в трехмерном пространстве.

Рассмотрим некоторое множество P векторов линейного пространства и построим их всевозможные линейные комбинации. Получим некоторое подпространство (проверьте!), называемое *линейной оболочкой* множества P . Иногда говорят, что линейная оболочка натянута на векторы множества P .

Размерность линейной оболочки не превосходит числа исходных векторов (почему?).

ПРИМЕР.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

Рассмотрим однородную СЛАУ: $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0,$

$$3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0.$$

Эти уравнения можно рассматривать как некоторые связи, наложенные на координаты векторов в R_3 . Решение этой системы можно записать, например, в

виде $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Данная форма записи представляет собой

множество линейных комбинаций двух линейно независимых векторов, т.е. их линейную оболочку. Геометрически это решение задает плоскость, проходящую через начало координат, т.е. подпространство, натянутое на

векторы ФСР: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, выступающие в роли базиса в этом подпространстве.

УПРАЖНЕНИЯ

9. Выявить линейные зависимости между столбцами

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{a}_3 = 10\mathbf{a}_1 - 7\mathbf{a}_2$.

10. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы столбцов:

а) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix};$

в) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Ответ. а) 2, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; б) 1, $\mathbf{a}_1$; в) 2, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

11. Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором

базисе СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix}$. Ответ. 2, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. а) Пусть в некотором подпространстве размерности k введен базис. По Утверждению 2 его можно дополнить до базиса в исходном пространстве. Какие координаты будут иметь векторы подпространства в таком базисе?

б) Равенство нулю определенных компонент вектора можно рассматривать как систему линейных уравнений, задающую подпространство. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

Определение. Суммой $L' + L''$ подпространств L' и L'' будем называть линейную оболочку их объединения $L' \cup L''$.

В нее входят векторы, являющиеся суммой векторов из L' и L'' , и только они.

По определению сумма подпространств является подпространством. Ее размерность не превосходит суммы размерностей складываемых подпространств (почему?). Как построить в ней базис?

Определение. Пересечением $L' \cap L''$ подпространств L' и L'' будем называть множество векторов, принадлежащих обоим подпространствам.

Пересечение всегда непусто, т.к. обязательно содержит нулевой вектор.

Оно является подпространством, поскольку сумма и произведение на число векторов из L' и L'' там лежат, т.к. принадлежат и L' , и L'' .

Аналогично определяются сумма и пересечение любого количества подпространств.

ПРИМЕРЫ.

Рассмотрим прямую и плоскость. Они представляют собой линейные подпространства E_3 и имеют размерности 1 и 2 соответственно.

а) Пусть прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е. пересекаются. Тогда эта точка представляет собой нулевой вектор – единственный элемент линейного пространства, являющегося пересечением этих двух пространств. А сумма их составляет все пространство E_3 .

б) Если прямая лежит в плоскости или параллельна ей, то пересечением этих двух подпространств будет данная прямая, а суммой – данная плоскость.

Определение. *Прямой суммой $L' \oplus L''$ подпространств L' и L''* называется такая их сумма, размерность которой равна сумме размерностей слагаемых:

$$\dim(L' \oplus L'') = \dim L' + \dim L''.$$

Теорема 4 (о прямой сумме).

Для того чтобы сумма L подпространств L' и L'' была прямой, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) любой вектор из L' был линейно независим с любым вектором из L'' ;
- 2) каждый вектор из L однозначно раскладывался в сумму векторов из L' и L'' ;
- 3) пересечение L' и L'' было нулевым подпространством;
- 4) объединение базисов L' и L'' являлось бы базисом в L .

Доказательство. Докажем, что каждое из четырех утверждений теоремы следует из предыдущего, а первое следует из определения прямой суммы. Из утверждения 4) следует, что $\dim L = \dim L' + \dim L''$, т.е. определение прямой суммы, что обеспечивает равносильность всех сформулированных утверждений определению.

1) Возьмем по одному вектору из L' и L'' . Пусть они линейно зависимы. Дополним каждый из них до базиса в своем подпространстве. Получим систему из $k = \dim L' + \dim L''$ векторов. Каждый вектор из L должен раскладываться по этой системе, но в ней есть линейно зависимые векторы, значит, базис в L содержит менее k векторов, и получается, что $\dim L < \dim L' + \dim L''$. Противоречие.

2) Пусть $x', y' \in L'$, $x'', y'' \in L''$, $x \in L$. Предположим $x = x' + y'$ и $x = x'' + y''$. Вычтем из одного равенства другое, получим: $0 = (x' - x'') + (y' - y'')$. Отличие от нуля хотя бы одной из разностей означало бы линейную зависимость векторов из L' и L'' , что противоречит доказанному в 1).

3) Пусть имеется ненулевой вектор $\mathbf{z}$, принадлежащий и L' , и L'' , т.е. $\mathbf{z} = \mathbf{x}'$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}''$. Но это означает, что один и тот же вектор представлен двумя способами как сумма векторов из L' и L'' , чего не может быть по утверждению 2).

4) Введем базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_{l_1}$ в L' и базис $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_{l_2}$ в L'' . Каждый вектор из L непременно раскладывается по этой системе. Покажем, что она линейно независима. Доказываем от противного:

$$\alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha_2 \mathbf{e}'_2 + \dots + \alpha_{l_1} \mathbf{e}'_{l_1} + \beta_1 \mathbf{e}''_1 + \beta_2 \mathbf{e}''_2 + \dots + \beta_{l_2} \mathbf{e}''_{l_2} = \mathbf{0},$$

тогда

$$\underbrace{\alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha_2 \mathbf{e}'_2 + \dots + \alpha_{l_1} \mathbf{e}'_{l_1}}_{\in L'} = - \underbrace{\beta_1 \mathbf{e}''_1 + \beta_2 \mathbf{e}''_2 + \dots + \beta_{l_2} \mathbf{e}''_{l_2}}_{\in L''}.$$

В 3) доказано, что единственный общий элемент этих подпространств нулевой, т.е. $\alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha_2 \mathbf{e}'_2 + \dots + \alpha_{l_1} \mathbf{e}'_{l_1} = \mathbf{0}$ и $-\beta_1 \mathbf{e}''_1 - \beta_2 \mathbf{e}''_2 - \dots - \beta_{l_2} \mathbf{e}''_{l_2} = \mathbf{0}$. В силу линейной независимости векторов, составляющих базисы в L' и L'' , получаем равенство нулю всех α_i и β_i и линейную независимость объединения базисов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_{l_1}$ и $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_{l_2}$. ■

Вывод: любое пространство можно представить в виде прямой суммы подпространств.

Теорема 5 (формула Грассмана).

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Доказательство. Если сумма прямая, формула очевидна.

Пусть $L_1 \cap L_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда можно представить $L_2 = (L_1 \cap L_2) \oplus M$, а $L_1 + L_2 = L_1 + (L_1 \cap L_2) + M$. Поскольку $(L_1 \cap L_2) \subset L_1$, то $L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1$ и $L_1 + L_2 = L_1 + M$. Покажем, что последняя сумма – прямая. Рассмотрим $\mathbf{z} \in L_1 \cap M$. Из того факта, что $M \subset L_2$ следует, что $\mathbf{z} \in L_1 \cap L_2$, тогда имеем, что $\mathbf{z} \in (L_1 \cap L_2) \cap M$, т.е. нулевой по Теореме 4. Значит, $L_1 \cap M = \{\mathbf{0}\}$ и их

сумма прямая, т.е. $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim M$. В то же время $\dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim M$. Вычитаем почленно:
 $\dim(L_1 + L_2) - \dim L_2 = \dim L_1 - \dim(L_1 \cap L_2)$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

13. Доказать, что двумерное арифметическое пространство является прямой суммой линейных подпространств, натянутых на системы векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

14. Разложить вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ из двумерного арифметического пространства в

сумму двух векторов, один из которых лежит в P , другой – в Q , где P –

линейная оболочка вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, а Q – линейная оболочка вектора

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Проверить единственность разложения.

Ответ. $\mathbf{x} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b}$.

15. Найти проекцию вектора $\mathbf{x} = (1, 4, 1)^T$ из трехмерного арифметического пространства на линейное подпространство P параллельно линейному подпространству Q , где P – линейная оболочка системы векторов

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а } Q \text{ – линейная оболочка вектора } \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$.

16. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств трехмерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$\text{а) } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) 3 (сумма совпадает со всем пространством), $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$; 2 (пересечение совпадает со вторым подпространством), $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. б) 3 (сумма совпадает со всем пространством), $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$; 1, $(40, 45, 43)^T$.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

№2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы матриц:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

№3. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов $(1+t)^3, t^3, 1, t+t^2$.

№4. Доказать, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют базис в трехмерном арифметическом пространстве, и найти координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в этом

базисе: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$

№5. Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в

некотором базисе системой линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & -10 \\ -7 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

№6. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной

системы столбцов: 1)(р)¹ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

№7. Доказать, что четырехмерное арифметическое пространство является прямой суммой линейных подпространств, натянутых на системы векторов

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

№8. Разложить данный вектор $\mathbf{x} = (-1, 8, -6, 5)^T$ из четырехмерного арифметического пространства в сумму двух векторов, один из которых лежит в P , а другой – в Q , где P – линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, а Q – линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Проверить единственность разложения. $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 3)^T, \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 2)^T, \mathbf{b}_1 = (1, 0, 1, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, 1)^T.$

¹ Значком (р) обозначаются задачи, для которых приведено полное решение в разделе «Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения».

№9. Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x} = (1, 4)^T$ из двумерного арифметического пространства на линейное подпространство P , параллельно линейному подпространству Q , где P – линейная оболочка вектора $\mathbf{a} = (-1, 1)^T$, а Q – линейная оболочка вектора $\mathbf{b} = (1, 3)^T$.

№10. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n -мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

$$1)(p) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

№1. Размерность равна 3; базис: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$

№2. Размерность равна 2; базис: $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

№3. Размерность равна 3; базис: $(1+t)^3, t^3, 1.$ №4. $(1, -2, -1)^T.$

№5. Размерность равна 1; базис: $(0, 1, 1)^T.$

№6. 1) *Решение.* Выпишем матрицу A из координатных столбцов векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\text{rg } A = r$. Для того чтобы вектор с координатным столбцом

$\xi = (x_1, \dots, x_n)^T$ принадлежал подпространству P , необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\tilde{A} = (A|\xi)$ также был равен r . Элементарными преобразованиями строк матрица A приводится к ступенчатому виду; при этом последние $n - r$ строк становятся нулевыми. Если такие же преобразования проделать с матрицей $\tilde{A}$, то в последних $n - r$ строках на $k + 1$ -м месте появятся некоторые линейные комбинации чисел $x_1, \dots, x_n$. Приравняв их к нулю, получим искомую систему линейных уравнений.

Составим систему уравнений, определяющую линейную оболочку системы данных векторов:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array} \right) \text{ приводится к ступенчатому виду } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы без четвертого столбца равен 2; для того чтобы ранг всей матрицы тоже был равен 2, необходимо и достаточно выполнение условий $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$. Это и есть искомая система линейных уравнений, определяющая линейную оболочку данных векторов в стандартном базисе.

$$2) \ x_1 + x_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{№7. } \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} = -\frac{13}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{29}{2}\mathbf{a}_2 = (8, 8, 8, 37)^T \in P, \quad \text{№8. } \frac{1}{4}\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T. \\ \mathbf{z} = -9\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 = (-9, 0, -14, -32)^T \in Q \end{aligned}$$

№9. 1) *Решение.* Составим системы уравнений, определяющие данные подпространства P и Q . Имеем (см. №6):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 2 & x_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & x_1 \\ 3 & 1 & 3 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 & x_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & -3 & x_2 - 3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 \end{array} \right);$$

Первое подпространство задается одним уравнением $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, второе – одним уравнением $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. При этом мы замечаем также, что $\dim P = \dim Q = 2$. Базис в P образуют, например, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; базис в Q образуют, например, векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$.

Найдем размерность и базис суммы $P + Q$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right);$$

$\dim(P + Q) = 3$, т.е. сумма $P + Q$ совпадает со всем трехмерным пространством; базис суммы образуют, например, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$.

Пересечение $P \cap Q$ задается системой уравнений $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Матрица этой системы элементарными преобразованиями строк приводится к виду $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Ранг матрицы равен 2, значит, $\dim(P \cap Q) = 3 - 2 = 1$, что, впрочем, можно было определить и раньше по формуле $\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P + Q)$. Базисный вектор пересечения имеет координатный столбец, удовлетворяющий условиям $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = 0$; можно взять столбец $(1, 0, 1)^T$.

2) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(3, 1, 0)^T$.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. *Линейным отображением* пространства L^n в пространство L^m будем называть закон, по которому каждому вектору x из L^n ставится в соответствие единственный вектор $\varphi(x)$ из L^m , называемый *образом* вектора x и

$$1) \forall x, y \in L^n \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y); \quad 2) \forall x \in L^n, \forall \alpha \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x).$$

Записывают $x \mapsto \varphi(x)$ или $\varphi: L^n \xrightarrow{\varphi} L^m$.

Определение. *Линейным преобразованием* или *линейным оператором* в пространстве L^n называют линейное отображение L^n в L^n .

ПРИМЕРЫ.

1) P_n – пространство многочленов вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $n \geq 2$,

$\varphi = \frac{d}{dx}$ – линейное отображение $P_n \rightarrow P_{n-1}$.

2) $\mathbb{R}^n$ – пространство столбцов высоты n , A – матрица размера $m \times n$
 $\varphi: \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow AX \subset \mathbb{R}^m$.

3) Сопоставление вектору его координатного столбца – отображение геометрического n -мерного пространства в арифметическое.

4) Проектирование векторов на плоскость, на прямую.

5) Умножение вектора на число – линейное преобразование.

6) Взятие первообразной не является линейным отображением (почему?).

Определение. *Множество значений* линейного отображения – множество образов всех векторов из пространства L^n . Обозначается $Im\varphi$.

Определение. *Ядро* линейного отображения – множество векторов из пространства L^n , отображающихся в нулевой вектор. Обозначается $Ker\varphi$.

Утверждение 3. Множество значений линейного отображения есть подпространство в L^m . Ядро отображения есть подпространство в L^n .

Доказательство. $\forall y_1, y_2 \in Im\varphi, \forall \alpha, \beta$:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha \varphi(x_1) + \beta \varphi(x_2) = \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Im\varphi.$$

$\forall x_1, x_2 \in Ker\varphi, \forall \alpha, \beta$:

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \varphi(x_1) + \beta \varphi(x_2) = \alpha \theta + \beta \theta = \theta \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in Ker\varphi. \blacksquare$$

Определение. *Рангом отображения* называется размерность его множества значений: $Rg\varphi = \dim(Im\varphi)$.

Определение. Отображение $\varphi: L^n \xrightarrow{\varphi} L^m$ *сюрьективно*, если $Rg\varphi = m$, т.е. $Im\varphi = L^m$.

Определение. Отображение $\varphi: L^n \xrightarrow{\varphi} L^m$ *инъективно*, если $Ker\varphi = \{\theta\}$.

Утверждение 4. При инъективном отображении различные векторы имеют различные образы.

Доказательство. От противного: пусть $x_1 \neq x_2 \in L^n$ и $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = y \in L^m$. Тогда $\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \theta$, т.е. ненулевой вектор $x_1 - x_2 \in Ker\varphi$, что противоречит инъективности. ■

Определение. Линейное отображение называется *изоморфизмом*, если оно и инъективно, и сюрьективно, т.е. взаимно однозначно.

УПРАЖНЕНИЕ

Для отображения из ПРИМЕРА 1) найти множество значений, ядро, ранг, выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, изоморфизмом.

Определение. Пусть дано линейное отображение $\varphi: L^n \xrightarrow{\varphi} L^m$; $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ – базис в L^n , $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m)$ – базис в L^m . **Матрица отображения** – матрица размера $m \times n$, столбцы которой представляют собой координатные столбцы $\varphi(\mathbf{e}_i)$ в базисе F : $\varphi \leftrightarrow \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\varphi(\mathbf{e}_1) \qquad \varphi(\mathbf{e}_n)$

ПРИМЕР.

Найдем матрицу для отображения дифференцирования, применяемого к пространству многочленов степени не выше n : $\frac{d}{dx} P^n \rightarrow P^{n-1}$.

Базис в P^n : $1, x, x^2, \dots, x^n$, т.е. $\mathbf{e}_j = x^j$, $j = 0, 1, \dots, n$;

базис в P^{n-1} : $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, т.е. $\mathbf{f}_k = x^k$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Найдем образы базисных векторов и составим матрицу из их координатных столбцов.

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{e}_j) = \frac{d}{dx}(x^j) = jx^{j-1} = j \mathbf{f}_{j-1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow j-1 \rightarrow \Phi = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & n \end{pmatrix}}_{n+1} \Bigg\} n.$$

Теорема 6 (координатная запись линейного отображения).

$\forall \mathbf{x} \in L^n, \forall \varphi: L^n \rightarrow L^m$, если X – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе E , Y – координатный столбец $\varphi(\mathbf{x})$ в базисе F , Φ – матрица отображения φ , то $Y = \Phi X$.

Доказательство. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по базису E : $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$.

Рассмотрим его образ:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m \Phi_{ij} \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \Phi_{ij} x_j}_{y_i}.$$

В преобразованиях было использовано свойство линейности отображения φ , а также тот факт, что координаты образов базисных векторов $\varphi(\mathbf{e}_j)$ в базисе F есть столбцы матрицы отображения Φ . Полученное равенство в матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{m1} & \cdots & \Phi_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ т.е. } Y = \Phi X. \blacksquare$$

Замечание (доказать самостоятельно).

- 1) Столбцы матрицы отображения линейно независимы тогда и только тогда, когда отображение инъективно;
- 2) строки матрицы отображения линейно независимы тогда и только тогда, когда отображение сюръективно;
- 3) линейное отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $n = m = \text{Rg} \Phi$.

Определение. $\varphi: L^n \xrightarrow{\varphi} L^m \quad \psi: L^m \xrightarrow{\psi} L^p$. Произведение линейных отображений φ и ψ является линейным отображением, переводит L^n в L^p , обозначается $\psi \varphi$.

Утверждение 5. Матрица отображения $\psi \varphi$ равна произведению матриц этих отображений: $\Psi\Phi$.

Доказательство. Пусть X – произвольный координатный столбец в L^n . Координатные столбцы $\varphi(x)$ и $\psi(\varphi(x))$ обозначим Y и Z . Тогда по Теореме 6 $Y = \Phi X$, $Z = \Psi Y = \Psi \Phi X$, т.е. матрица отображения $\psi \varphi$ равна $\Psi\Phi$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – произвольный вектор n -мерного арифметического пространства. Исследовать линейность преобразования φ , если

- а) $\varphi(x) = (x_2, x_1 - x_2)^T$, $n = 2$;
- б) $\varphi(x) = (2x_3 + x_1, 2x_1x_3, x_1 - x_2)^T$, $n = 3$;
- в) $\varphi(x) = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)^T$, $n = 3$.

Ответ: а) линейно, б)в) нет.

2. Пусть r, x – произвольные, a – ненулевой вектор трехмерного геометрического векторного пространства. Выразить образ вектора x , определить ядро, множество значений и ранг линейного отображения φ , если φ есть ортогональное проектирование на прямую $[r, a] = 0$.

Ответ: $\varphi(x) = (x, a) \frac{a}{|a|^2}$, ядро – плоскость $(r, a) = 0$, множество значений –

прямая $[r, a] = 0$, $\text{rg } \varphi = 1$.

3. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства E_3 на подпространство L , если L есть прямая $x = y = z$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Линейное преобразование φ трехмерного линейного пространства задано матрицей A . Найти его ядро и множество значений. Выяснить, изоморфно ли данное преобразование.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}. \quad \text{Ответ: } \text{Ker } \varphi = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{Im } \varphi = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Пусть $D = \frac{d}{dt}$ – операция дифференцирования, сопоставляющая функции $f(t)$ ее производную $f'(t)$.

1) Показать, что D является линейным преобразованием линейного пространства функций, бесконечно дифференцируемых на интервале (a, b) .

2) Пусть $P^{(m)}$ – линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m . Найти ядро, множество значений и матрицу преобразования $D: P^{(m)} \rightarrow P^{(m)}$ в стандартном базисе $1, t, t^2, \dots, t^m$.

$$\text{Ответ: } \text{Ker } D = P^{(0)}, \text{ Im } D = P^{(m-1)}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Проверить, что функции $e^{\lambda t} p(t)$, где λ – фиксированное число, $p(t)$ – многочлен степени не выше n ($n \geq 1$) образуют линейное пространство, а

дифференцирование является линейным преобразованием. Вычислить матрицу преобразования в базисе $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Ответ: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}}_{n+1} \Bigg\} n+1.$

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – произвольный вектор n -мерного арифметического пространства. Исследовать линейность преобразования φ , если

а) $\varphi(x) = (x_2, x_1 x_2)^T$, $n = 2$;

б) $\varphi(x) = (x_2, x_1 - 3, x_3)^T$, $n = 3$;

в) $\varphi(x) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)^T$.

№2. Проверить линейность и выяснить геометрический смысл преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства, заданного формулой $\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, ($|\mathbf{a}| = 1$).

№3. Пусть $\mathbf{x}$ – произвольный вектор, $\mathbf{a}, \mathbf{n}$ – фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ , заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

а) $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$;

б) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

№4. Пусть $\mathbf{r}, \mathbf{x}$ – произвольные, $\mathbf{a}, \mathbf{n}$ – ненулевые векторы трехмерного геометрического векторного пространства. Выразить образ вектора $\mathbf{x}$, определить ядро, множество значений и ранг линейного преобразования φ , если φ есть:

а) ортогональное проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;

б) проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ ($(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$).

№5. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства E_3 на подпространство L , если L есть:

а) прямая $x = z = 0$; б) плоскость $x + y + z = 0$.

№6. Вычислить матрицу линейного преобразования φ , если φ – ортогональное отражение пространства E_3 : а) в плоскости $x = 0$; б) в прямой $x = 2y = z$.

№7. В трехмерном геометрическом векторном пространстве E_3 задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства

а) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

б) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

№8. Линейное отображение четырехмерного арифметического пространства в трехмерное задано матрицей A . Вычислить образ вектора $(4, -1, -1, 3)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№9. Линейное отображение n -мерного линейного пространства в m -мерное задано матрицей A . Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение сюръективным, инъективным, если:

а) $m = 2, n = 5$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

$$\text{б) } m = 4, n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

№10*. Отображение двумерного вещественного арифметического пространства в линейное пространство вещественных квадратных матриц второго порядка задано формулой $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Доказать линейность и инъективность отображения φ . Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

№11. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция ($t \in \mathbb{R}$). Рассмотрим операцию интегрирования $I: f(t) \mapsto \int_0^t f(\xi) d\xi$. Проверить, что интегрирование

определяет линейное отображение $I: P^{(n-1)} \rightarrow P^{(n)}$ ($n \geq 1$), найти его ядро, множество значений и ранг. Записать матрицу отображения в стандартных базисах.

№12. Координатные столбцы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$; $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ образуют соответственно матрицы A, B, C . Линейное преобразование φ переводит векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, а линейное преобразование ψ переводит $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ в $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ соответственно. Найти матрицу преобразования $\psi\varphi$ в исходном базисе.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№13. Пусть $P^{(n)}$ – пространство многочленов степени не выше n ($n \geq 1$) с вещественными коэффициентами. Отображения $\varphi: P^{(n-1)} \rightarrow P^{(n)}$, $\psi: P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)}$ определим формулами

$$\varphi(a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) = a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_{n-1} t^n,$$

$$\psi(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_1 + \dots + a_n t^{n-1}.$$

Проверить линейность отображений и показать, что $\psi\varphi$ – тождественное преобразование, а $\varphi\psi$ – нет.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

№1. а) нет; б) нет; в) линейно.

№2. Произведение ортогонального проектирования на плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ и поворота на $\pi/2$ вокруг прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$.

№3. а) Ортогональное проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$;

б) ортогональное проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$.

№4. а) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}$; ядро – прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{n}] = 0$; множество значений –

плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\text{rg } \varphi = 2$. б) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a}$; ядро – прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$;

множество значений – плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\text{rg } \varphi = 2$.

$$\text{№5. а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№6. а) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№7. а) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha & 0 \\ \pm \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№8. $(0, 6, 18)^T$.

№9. а) $(2, 0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 1, 2, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0, 1)^T$; φ сюръективно;
 б) $(3, 1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$ и $(-2, 1, 7, -3)^T$.

№10*.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№11.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$
 Ядро $\{0\}$. Множество значений – подпространство

многочленов степени не выше n с нулевым свободным членом; ранг n .

№12. Указание. Пусть A, B, C – матрицы, составленные

из координатных столбцов векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i$ ($i = 1, 2, 3$),

X, Y – матрицы преобразований φ и ψ в данном базисе.

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $XA = B$, $YB = C$, $YXA = YB = C$, т.е. матрица Z

преобразования $\psi\varphi$ удовлетворяет матричному уравнению $ZA = C$.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Напоминаем, что *линейным оператором (преобразованием)* в пространстве L^n называют линейное отображение пространства L^n в L^n , т.е. в само себя в силу изоморфизма линейных пространств.

Поскольку речь идет об одном и том же пространстве, логично вводить один базис и рассматривать векторы и их образы в этом базисе. Тогда матрица линейного преобразования состоит из столбцов, которые являются координатными столбцами образов базисных векторов в этом же базисе.

Множество значений и ядро линейного оператора являются подпространствами одного и того же пространства. Приобретают смысл вопросы о взаимном расположении вектора и его образа.

Определение. Подпространство $L^k \subseteq L^n$ *инвариантно* относительно линейного оператора φ , если $\varphi(L^k) \subseteq L^k$.

ПРИМЕРЫ.

- 1) Нулевое подпространство инвариантно относительно любого преобразования;
- 2) каждое подпространство инвариантно относительно тождественного и нулевого преобразования;
- 3) $\text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ – инвариантные подпространства (почему?).
- 4) при повороте пространства вокруг некоторой оси инвариантна оператору поворота эта ось и плоскость, ей перпендикулярная.

Определение. *Собственный вектор* линейного оператора – ненулевой вектор $\mathbf{x}$ такой, что $\exists \lambda: \varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, это число λ называется *собственным числом* линейного оператора.

Иными словами, собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется

с коэффициентом λ , а его ориентация остается неизменной. Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Заметим, что если вектор $\mathbf{x}$ собственный, то векторы $\lambda\mathbf{x}$ образуют одномерное инвариантное подпространство.

Теорема 7.

В комплексном линейном пространстве всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор φ , действующий в комплексном линейном пространстве; его матрицу обозначим Φ .

Определение собственного вектора $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ в координатной форме имеет вид $(\Phi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Это однородная СЛАУ. Она имеет нетривиальное решение, если

$$\det(\Phi - \lambda E) = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) называется *характеристическим уравнением* оператора φ и матрицы Φ . Его корни – *характеристические* или *собственные числа* матрицы Φ и линейного оператора φ . В n -мерном пространстве, уравнение (*) имеет степень n , а значит, и n корней, возможно, все комплексные. Подставляя какой-либо корень в $(\Phi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, получаем однородную СЛАУ с вырожденной матрицей, что гарантирует наличие у нее нетривиального решения. Оно и будет собственным вектором, а соответствующее λ – собственным числом. ■

ПРИМЕР.

Рассмотрим линейный оператор с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, действующий в

комплексном линейном пространстве. Его характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ после раскрытия определителя превращается в квадратное уравнение $(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ с корнями $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Для первого собственного числа имеем $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

т.е. координаты соответствующего собственного вектора должны удовлетворять уравнению $x_1 + (-1+i)x_2 = 0$. С точностью до числового

множителя собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично

находится второй собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_2 .

Теорема 8.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $p \geq 2$ – различные собственные числа оператора A вещественного пространства, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.

Доказательство. По индукции. $p = 2$. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – различные собственные векторы, т.е. $A(\mathbf{x}_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1$, $A(\mathbf{x}_2) = \lambda_2 \mathbf{x}_2$. Предположим, что они линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Применим к правой и левой части равенства (1) оператор A , получим:

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Умножим правую и левую часть равенства (1) на λ_1 получим:

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (3):

$$\alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \alpha_2 \lambda_1 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0,$$

аналогично получим $\alpha_1 = 0$, т.е. векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ линейно независимы.

Предположим, что $p - 1$ собственных векторов линейно независимы.

Пусть от противного p векторов линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Применим к правой и левой части равенства (4) оператор A , получим:

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Умножим правую и левую часть равенства (4) на λ_p получим:

$$\alpha_1 \lambda_p \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_p \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Вычтем из равенства (5) равенство (6):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_p) \mathbf{x}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_p) \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} (\lambda_{p-1} - \lambda_p) \mathbf{x}_{p-1} = \mathbf{0}. \quad \text{В силу}$$

линейной независимости $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{p-1}$ и различия всех λ_i получаем

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1} = 0, \text{ в равенстве (4) остается } \alpha_p \mathbf{x}_p = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_p = 0, \text{ т.к. } \mathbf{x}_p -$$

собственный вектор и не может быть нулевым. Итак, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ линейно

независимы. ■

Следствие.

Матрица преобразования диагональна, причем на диагонали стоят собственные числа преобразования, тогда и только тогда, когда базис составлен из собственных векторов.

Доказательство. Пусть все базисные векторы собственные.

$$A(\mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Обратно. Если A диагональна, получаем $A(\mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j$, т.е. базисные векторы – собственные. ■

Итак, если имеется n линейно независимых собственных векторов, матрица преобразования приводится к диагональному виду, такое преобразование будем называть *диагонализируемым*.

Теорема 9.

Если λ_0 – корень кратности k характеристического уравнения линейного оператора, то этому собственному числу соответствует не более k линейно независимых собственных векторов.

Доказательство. Пусть имеется l линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу λ_0 . Дополним их до базиса в L^n . Тогда матрица оператора в этом базисе примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \lambda_0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \lambda_0 \end{matrix}}^l & B \\ \hline O & \overline{C} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A принимает вид $\det(A - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^l \det(C - \lambda E) = 0$ и имеет по условию k корней, равных λ_0 . Значит, $l \leq k$. ■

ПРИМЕР

Найдем собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A .

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $|A - \lambda E| = (1 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$ получили собственное число кратности 2.

Попытаемся найти собственные векторы: имеем

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{один собственный вектор. Для}$$

создания базиса его не хватит. Преобразование не диагонализируемо.

2) $|A - \lambda E| = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$. Первому собственному числу соответствует собственный вектор $C(1, 1, 1)^T$, а двум другим два линейно независимых собственных вектора: $C_1(1, 1, 0)^T + C_2(1, 0, -3)^T$. Все три собственных вектора линейно независимы, могут составить базис, преобразование

диагонализируемо, его матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Поскольку работать с диагональной матрицей всегда легче, то базис, в котором матрица оператора принимает такой вид, является предпочтительным по сравнению с другими. Этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора. Важно, чтобы количество линейно независимых собственных векторов совпадало с размерностью пространства. Это всегда имеет место, когда все корни характеристического уравнения различны, и лишь в некоторых случаях, когда корни характеристического уравнения кратны.

В случае, когда возникает необходимость работать с недиагонализируемыми операторами, т.е. имеющими кратные корни и недостаточное для построения базиса число линейно независимых собственных векторов, наиболее простым видом его матрицы будет *жорданова нормальная форма*, состоящая из так называемых жордановых клеток. Чтобы найти базис, в котором матрица приобретет такой вид, в справочной литературе следует искать раздел «присоединенные векторы».

Жорданова форма:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \dots & O & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & & \vdots & & 0 & \ddots & 1 \dots O \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_2 \\ & O & & & \vdots & & \ddots O \\ & & & & & & \lambda_p & 1 & 0 \\ \vdots & & & O & & O & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ

Линейный оператор вещественного n -мерного линейного пространства задан своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов оператора. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу оператора и выяснить его геометрический смысл.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}; & \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ответ: а) $\text{diag}(-4, 4)$ в базисе $(8, -1)^T, (0, 1)^T$;

б) $\text{diag}(14, 0, 0)$ в базисе $(2, 1, -3)^T, (-1, 2, 0)^T, (6, 3, 5)^T$;

в) $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$ в базисе $(1, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 1, 0)^T, (0, -1, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 1)^T$.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть x, y – собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, а числа α, β отличны от нуля. Доказать, что вектор $\alpha x + \beta y$ не является собственным.

№2. Линейный оператор вещественного трехмерного линейного пространства задан своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов оператора. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу оператора и выяснить его геометрический смысл.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

№3*. Найти характеристические числа линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Выяснить, диагонализируем ли он: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то найти базис из собственных векторов и записать в нем матрицу оператора; в противном случае объяснить, почему преобразование не диагонализируемо.

№4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ пространства вещественных многочленов $p(t)$ не выше второй степени, если $\varphi(p) = tp'$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

№2. а) $\text{diag}(1, 2, 3)$ в базисе $(0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T$. б) $\text{diag}(7, 7, -7)$ в базисе $(1, -2, 0)^T, (0, 3, 1)^T, (2, 1, -3)^T$; в) $\lambda = -1$, $(2, -1, 0)^T, (1, -2, 1)^T$.

№3*. $\lambda_1 = \varepsilon, \lambda_2 = \varepsilon^2; \varepsilon = e^{2\pi i/3}$. а) нет; б) $\text{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2)$ в базисе $(1, 1, -\varepsilon)^T, (1, 1, -\varepsilon^2)^T$.

№4. Через p обозначены базисные векторы собственных подпространств.

$\lambda = 0, p = 1; \lambda = 1, p = t; \lambda = 2, p = t^2$.

ГЛАВА 3. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

До сих пор обсуждались векторы линейных пространств, и над ними были определены линейные операции. Понятия длины вектора и угла между векторами не вводились, равно как и скалярное произведение векторов, которое в геометрическом пространстве определяется через длины векторов и угол между ними. В n -мерных пространствах удобнее, оказывается, сделать наоборот, т.е. сначала ввести понятие скалярного произведения векторов.

Определение. Будем говорить, что в вещественном n -мерном пространстве определено *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющее аксиомам:

- 1°. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – симметричность;
- 2°. $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где λ – действительное число;
- 3°. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ – дистрибутивность;
- 4°. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ – положительность.

Определение. Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством*. Для его обозначения часто используют букву E .

ПРИМЕРЫ.

- 1) В геометрии перечисленными свойствами обладает обычное скалярное произведение, поэтому привычное нам трехмерное пространство является евклидовым, а вся аналитическая геометрия – евклидовой геометрией.
- 2) В арифметическом пространстве, где векторы заданы как столбцы из n чисел, можно определить скалярное произведение векторов ξ и η как

$$(\xi, \eta) = \xi^T \eta = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n,$$

выполнение аксиом проверяется непосредственно.

3) Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным

произведением вида $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ является евклидовым, т.к.

аксиомы выполнены в силу свойств определенного интеграла.

Определение. *Длиной вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве* называется число, равное $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Обозначается $|\mathbf{x}|$.

Очевидно, в силу аксиомы 4°, что длина вектора – вещественное неотрицательное число, причем длина вектора равна нулю, только если он нулевой.

Определение. *Углом между векторами в евклидовом пространстве* называется число φ , удовлетворяющее условию $\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Определение. Векторы называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Для ненулевых векторов это означает, что угол между ними равен $\pi/2$.

Утверждение 1. Только нулевой вектор евклидова пространства ортогонален любому другому вектору.

Доказательство. Если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для всех $\mathbf{y}$, то, положив $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, что возможно только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

Утверждение 2 (обобщенная Теорема Пифагора).

Если векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ попарно ортогональны, то

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} + \dots|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 + \dots$$

Доказательство. Рассмотрим два ортогональных вектора. Если один из них нулевой, утверждение очевидно. Пусть они оба ненулевые. Тогда по определению квадрата длины вектора

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

В силу ортогональности $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, значит, $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$. Случай произвольного количества слагаемых рассматривается аналогично. ■

Следует заметить, что из определения скалярного произведения не очевидно, что $-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$, т.е. величина $\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$ может являться косинусом какого-то угла. Убедиться в корректности определения угла между векторами евклидова пространства помогает

Теорема 1 (неравенство Коши-Буняковского).

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, где t – произвольное действительное число. Скалярное произведение $(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, t$. Пользуясь аксиомами, перепишем это скалярное произведение в виде $t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$. Полученное квадратичное неравенство относительно t выполнено при любом t , когда его дискриминант меньше или равен нулю. Т.е. $4(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0$, откуда получаем доказываемое неравенство. ■

Замечание. Знак равенства в неравенстве Коши-Буняковского имеет место, если найдется такое число t_0 , что вектор $\mathbf{x} + t_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы.

Таким образом, неравенство $-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$, которое можно переписать в

виде $\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{|\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2} \leq 1$, представляет собой иную форму записи только что

доказанного неравенства Коши-Буняковского, что и обеспечивает корректность определения угла между векторами евклидова пространства.

Следствие (неравенство треугольника).

Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Доказательство.

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2.$$

Знак меньше или равно появился в силу неравенства Коши-Буняковского:

$$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|. \text{ Т.е. имеем } |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \blacksquare$$

Полезно посмотреть, как выглядит неравенство Коши-Буняковского для приведенных выше примеров евклидовых пространств:

1) в геометрическом трехмерном пространстве имеем полное совпадение с принятым там определением скалярного произведения;

2) в арифметическом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$;

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right).$$

3) в пространстве непрерывных на отрезке функций

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

Это неравенство часто используется в анализе.

Заметим, что все вышесказанное относилось только к вещественным линейным пространствам. И определение скалярного умножения для вещественного пространства окажется неверным в комплексном пространстве. В самом деле, рассмотрим четвертую аксиому скалярного произведения. Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$. Возьмем вектор $\mathbf{y} = i\mathbf{x}$, для него $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (i\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = -(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$, чего быть не может! По этой причине в комплексном линейном пространстве скалярное произведение определяется немного иначе.

Определение. Будем говорить, что в комплексном n -мерном пространстве определено *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющее аксиомам:

- 1°. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ – эрмитова симметричность;
- 2°. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где λ – комплексное число;
- 3°. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ – дистрибутивность;
- 4°. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ – положительность.

Определение. Комплексное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *унитарным (эрмитовым) пространством*. Будем обозначать унитарные пространства буквой U .

Полезно отметить, что $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \bar{\lambda}\overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, т.е. числовой множитель выносится из второго сомножителя в комплексно-сопряженном виде.

ПРИМЕР.

В арифметическом комплексном пространстве, где векторы заданы как столбцы из n чисел, можно определить скалярное произведение векторов ξ и η как

$$(\xi, \eta) = \xi^T \bar{\eta} = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n.$$

Проверим выполнение аксиом:

$$1^\circ. (\eta, \xi) = \overline{\eta^T \bar{\xi}} = \overline{\eta_1 \bar{\xi}_1 + \eta_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \eta_n \bar{\xi}_n} = \overline{\eta_1 \bar{\xi}_1} + \dots + \overline{\eta_n \bar{\xi}_n} = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n = (\xi, \eta).$$

$$2^\circ. (\lambda \xi, \eta) = (\lambda \xi)^T \bar{\eta} = \lambda \xi_1 \bar{\eta}_1 + \lambda \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \lambda \xi_n \bar{\eta}_n = \lambda (\xi, \eta).$$

$$3^\circ. (\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta).$$

$$4^\circ. (\xi, \xi) = \xi^T \bar{\xi} = \xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 > 0.$$

Длина вектора в унитарном пространстве определяется так же, как в евклидовом пространстве и является действительным неотрицательным числом, равным нулю только для нулевого вектора. Угол определяется так же, но может быть комплексным.

Теорема 1'. (Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве).

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Доказательство. Если векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ таковы, что их скалярное произведение является действительным числом, то доказательство выглядит так же, как для евклидова пространства.

Пусть теперь $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}$. Запишем это число в показательной форме:

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r \cdot e^{i\varphi}$, где r и φ – соответственно, модуль и аргумент данного комплексного числа. Введем вспомогательный вектор $\tilde{\mathbf{x}} = e^{-i\varphi} \mathbf{x}$. Для него $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) = e^{-i\varphi} (\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Тогда скалярное произведение $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = e^{-i\varphi} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-i\varphi} r e^{i\varphi} = r = |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$. Т.е. $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ и для него доказываемое неравенство выполнено. Поэтому

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 = r^2 = |(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})|^2 \leq (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}). \blacksquare$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе двумерного вещественного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполнены:

а) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 10x_2 y_2$;

б) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 9x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + x_2 y_2$.

Ответ: а) нет, нарушена симметричность; б) нет, нарушена положительность, но $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$.

2. Пусть $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного n -мерного пространства. Определить, может ли функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются:

а) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ix_1 \bar{y}_2 + ix_2 \bar{y}_1, \quad n = 2$;

б) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 \bar{y}_1 + 4x_2 \bar{y}_2, \quad 1) n = 2, \quad 2) n \geq 3$

в) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1 \bar{y}_1 + ix_1 \bar{y}_2 - ix_2 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2, \quad n = 2$.

Ответ: а) нет, нарушена эрмитова симметричность; б) 1) да, 2) нет, но $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$; в) да.

КООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. МАТРИЦА ГРАМА

Определение. Пусть $\mathbf{e}$ – базис в евклидовом n -мерном пространстве.

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют координатные столбцы X и Y в этом базисе. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Матрица $\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = ((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$ называется *матрицей Грама*

базиса $\mathbf{e}$.

При помощи матрицы Грама скалярное произведение можно записать в матричной форме

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_i Y = X^T \Gamma Y \text{ в евклидовом пространстве,}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_i \bar{Y} = X^T \Gamma \bar{Y} \text{ в унитарном пространстве.}$$

Заметим, что в евклидовом пространстве $\Gamma = \Gamma^T$, т.е. симметричная, в унитарном $\Gamma^T = \bar{\Gamma}$. Такие матрицы называются эрмитовыми.

УПРАЖНЕНИЯ

3. В вещественном арифметическом пространстве скалярное умножение задано как функция компонент векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из данных векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Найти выражение скалярного произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через их компоненты в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$, $\mathbf{f}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{f}_2 = (1, -1)^T$.

$$\text{Ответ: } \Gamma_f = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами ξ и η соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов

$$\mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \Gamma_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \Gamma_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2.$$

Понятно, что при замене базиса, матрица Грама меняется. Выясним, по какому закону это происходит.

Пусть $\mathbf{e}$ – «старый» базис, $\mathbf{e}'$ – «новый» базис в евклидовом пространстве. Выражение новых базисных векторов через старые было введено в аналитической геометрии:

$$\mathbf{e}'_1 = s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + s_{31}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_2 = s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + s_{32}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_3 = s_{13}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3$$

или в матричной форме

$$(\mathbf{e}') = (\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3) = \underbrace{(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)}_{(\mathbf{e})} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\mathbf{e}') = (\mathbf{e}) \cdot S,$$

где S – матрица перехода от старого базиса к новому. Вообще, размерность строк $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{e}')$ и матрицы S может быть не только 3, а любым n .

Утверждение 3. Пусть $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ – базисы в евклидовом пространстве, S – матрица перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$, Γ, Γ' – матрицы Грама в этих базисах. Тогда $\Gamma' = S^T \Gamma S$.

Доказательство. Базисы связаны матрицей перехода $\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot S$. $\mathbf{e}_j' = \mathbf{e} \cdot S_j$, где S_j – j -й столбец матрицы S . Вычислим элемент матрицы Грама нового базиса $(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j') = (\mathbf{e} S_i)^T \cdot (\mathbf{e} S_j) = S_i^T \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} S_j = S_i^T \Gamma S_j$. Т.е. $\Gamma' = S^T \Gamma S$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

5. Решить задачу 4 при помощи доказанной формулы.
6. Вывести формулу для преобразования матрицы Грама при замене базиса в унитарном пространстве.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть в линейном пространстве заданы две операции скалярного умножения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2$. Показать, что для любых чисел $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, одновременно не равных нулю, операцией скалярного умножения будет и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 + \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2$.

№2. Обозначим через $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе n -мерного вещественного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ служить скалярным произведением, а в случае, если не может – указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполнены:

- а) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_1, \quad n = 2$; б) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2, \quad 1) n = 2, \quad 2) n \geq 3$.

№3. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Определить, может ли функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются:

а) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (3+i)x_1\bar{y}_2 + (3-i)x_2\bar{y}_1$;

б) $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.

№4. Показать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение может быть задано

формулой: $(p, q) = \sum_{k=0}^n p^{(k)}(a) q^{(k)}(a)$, где $p^{(k)}(a)$ и $q^{(k)}(a)$ – производные k -

го порядка, вычисленные в некоторой точке a вещественной оси.

№5. В вещественном или комплексном арифметическом пространстве скалярное умножение задано как функция компонент x_1, x_2 и y_1, y_2 векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из данных векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Найти выражение скалярного произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через их компоненты в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\mathbf{f}_1 = (1, -1)^T$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)^T$;

б) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$, $\mathbf{f}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{f}_2 = (1, -1)^T$.

№6. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства заданы в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ координатными столбцами ξ и η соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \quad \Gamma_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

№7. Найти угол между векторами $(1, 2, 2, 1)^T$ и $(1, 1, 1, 2)^T$ в пространстве $\mathbb{R}_4$ со стандартным скалярным произведением.

№8. В линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Доказать, что угол между

двумя соседними векторами $f_n = t^{n-1}$ и $f_{n+1} = t^n$ системы векторов $1, t, \dots, t^n, \dots$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

№2. а) Нет, нарушается свойство положительности; б) 1) может; 2) нет, нарушается свойство положительности, но $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$. Указание: при проверке свойства положительности воспользоваться приведением $F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ к сумме квадратов.

№3. а) Нет, нарушается свойство положительности; б) может.

№5. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$. №6. $\Gamma_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1$.

№7. $\arccos \sqrt{7/10}$. №8. Указание: $\cos \angle(f_n, f_{n+1}) = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}}$.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Определение. Система векторов $\{\mathbf{a}\} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ называется *ортogonalной*, если все входящие в нее векторы попарно ортогональны.

Определение. Система векторов $\{\mathbf{a}\} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ называется *ортонормированной*, если все входящие в нее векторы попарно ортогональны и имеют модуль, равный единице.

Утверждение 4. Всякая конечная система попарно ортогональных ненулевых векторов и, в частности, всякая ортонормированная система линейно независима.

Доказательство. Предположим, что рассматриваемая система векторов линейно зависима, т.е. $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$. Домножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{a}_i$. Получим $\alpha_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = 0$, откуда следует, что $\alpha_i = 0$, т.к. все векторы системы ненулевые по условию. Аналогично получаем равенство нулю всех остальных коэффициентов и приходим к противоречию. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть E – евклидово или унитарное пространство. Доказать, что: 1) если вектор $\mathbf{f} \in E$ и ортогонален ко всем векторам из E , то $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. 2) Если $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in E$ и $(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = (\mathbf{g}, \mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in E$, то $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.
2. Можно ли утверждать линейную независимость произвольной системы попарно ортогональных векторов?

Ответ: нет, если в системе есть нулевой вектор, то она линейно зависима.

3. Ввиду линейной независимости всякой ортогональной системы ненулевых векторов ее можно выбирать в качестве базиса. Особенно удобными являются ортонормированные базисы (ОНБ). Как выглядит матрица Грама в ОНБ? Как выглядит формула для скалярного произведения?

4. а) Проверить, что тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ ортогональна относительно скалярного

произведения $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Нормировать эту систему.

б) Что такое ряд Фурье? Как выглядят формулы для коэффициентов ряда Фурье? Как можно интерпретировать разложение функции в ряд Фурье с точки зрения линейных пространств?

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$.

Поскольку ОНБ является очень удобным базисом, важно уметь его строить в любом евклидовом пространстве. В доказательстве следующей теоремы дан алгоритм построения ОНБ.

Теорема 2 (процесс ортогонализации).

Произвольный базис евклидова пространства можно преобразовать в ортогональный базис, а затем в ортонормированный.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}\} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ – произвольная линейно независимая система векторов в L . Требуется построить в этом пространстве ОНБ $\{\mathbf{b}\} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$.

1. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 / |\mathbf{a}_1|$; получили единичный вектор.

2. Разложим вектор $\mathbf{a}_2$ на сумму двух векторов: параллельного и перпендикулярного $\mathbf{b}_1$: $\mathbf{a}_2 = \alpha_{21}\mathbf{b}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2$. Чтобы найти коэффициент α_{21} ,

домножим скалярно правую и левую часть последнего равенства на $\mathbf{b}_1$.

Учитывая, что $\mathbf{b}_1 \perp \tilde{\mathbf{b}}_2$, получаем $(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) = \alpha_{21}$, и тогда

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha_{21}\mathbf{b}_1; \quad \text{нормируем вектор } \tilde{\mathbf{b}}_2: \quad \mathbf{b}_2 = \tilde{\mathbf{b}}_2 / |\tilde{\mathbf{b}}_2|.$$

(Заметим, что $|\tilde{\mathbf{b}}_2| \neq 0$, иначе $\mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{a}_1$, т.е. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависимы, что противоречит условию).

3. Пусть уже построена система $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1})$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j; \quad \mathbf{b}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i / |\tilde{\mathbf{b}}_i|,$$

причем $\tilde{\mathbf{b}}_i \perp \mathbf{b}_j, \quad j=1, \dots, i-1 \Rightarrow (\tilde{\mathbf{b}}_i, \mathbf{b}_j) = 0$, значит, $(\mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i) = \alpha_{ij}$. И $|\tilde{\mathbf{b}}_i| \neq 0$, иначе вектор $\mathbf{a}_i$ являлся бы линейной комбинацией $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1})$, которые выражены через $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$.

4. Процедуру продолжаем вплоть до n . В результате получим ортонормированную систему векторов. ■

УПРАЖНЕНИЕ

№5. Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов $(1, 2, 1)^T, (3, 4, 1)^T, (1, -3, -1)^T$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T.$$

Определение. Вещественную матрицу S называют *ортogonalной*, если $S^T \cdot S = E$, т.е. $S^T = S^{-1}$.

Определение. Комплексную матрицу S называют *унитарной*, если $S^T \cdot \bar{S} = E$, т.е. $S^T = \bar{S}^{-1}$.

Утверждение 5. При замене базиса ОНБ переходит в ОНБ тогда и только тогда, когда матрица перехода ортогональная в евклидовом пространстве и унитарная – в унитарном.

Доказательство. Пусть e – ОНБ, e' – ОНБ.

Тогда для E^n $\Gamma(e') = E = S^T \Gamma(e) S = S^T S \Leftrightarrow S$ – ортогональна.

В U^n $\Gamma(e') = E = S^T \Gamma(e) \bar{S} = S^T \bar{S} \Leftrightarrow S$ – унитарна. ■

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И ДОПОЛНЕНИЯ

Определение. Ненулевые подпространства E', E'' *ортогональны*, если $\forall x' \in E', \forall x'' \in E'' (x', x'') = 0$

Определение. Дополнение подпространства E^k до полного пространства E^n называют *ортогональным дополнением* и обозначают $E_{\perp}^k$, если подпространства E^k и $E_{\perp}^k$ ортогональны.

Утверждение 6. $\forall E^k \subset E^n \exists E_{\perp}^k$, его размерность равна $n - k$, а сумма E^k и $E_{\perp}^k$ – прямая.

Доказательство. Пусть e' – ОНБ в E^k , его можно дополнить до базиса во всем E^n . Построенную линейно независимую систему векторов можно ортонормировать, получится $e = (e', e'')$ – ОНБ в E^n . Линейная оболочка $L(e'')$ и представляет собой $E_{\perp}^k$, т.к. каждый вектор из e'' при скалярном перемножении с e' даст ноль.

Размерность ортогонального дополнения видна по построению, а то, что сумма E^k и $E_{\perp}^k$ прямая – по размерностям слагаемых. ■

УПРАЖНЕНИЯ

6. В ОНБ четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами $(1, 1, 1, 2)^T$, $(1, 0, 1, -1)^T$. Дополнить эту систему до ортогонального базиса.

Ответ: например, $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(1, -6, 1, 2)^T$

7. Найти базис в ортогональном дополнении линейной оболочки вектора евклидова пространства E , заданного в некотором ОНБ этого пространства координатным столбцом: $(10, 1, -7)^T$.

Ответ: например, $(1, -10, 0)^T$, $(0, 7, 1)^T$

8. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ОНБ евклидова пространства системой уравнений

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,$$

$$x_1 - 3x_2 - 8x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0.$$

Ответ: например, $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
 $2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$.

Определение. Вектор $\mathbf{x}_\tau \in E^k$ называется *ортогональной проекцией вектора $\mathbf{x}$ на E^k* , если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\tau + \mathbf{x}_\perp$, где $\mathbf{x}_\perp \in E_\perp^k$. Обозначается $\text{пр}_{E^k} \mathbf{x} = \mathbf{x}_\tau$.

Представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\tau + \mathbf{x}_\perp$ всегда существует и однозначно в силу Теоремы о прямой сумме, т.к. $E^n = E^k \oplus E_\perp^k$.

Определение. Расстоянием от вектора $\mathbf{x}$ до подпространства E^k называют длину его составляющей, ортогональной относительно E^k :

$$\rho(\mathbf{x}, E^k) = |\mathbf{x}_\perp| = |\mathbf{x} - \text{пр}_{E^k} \mathbf{x}|.$$

Утверждение о длине перпендикуляра и наклонной из элементарной геометрии можно обобщить на случай n -мерного евклидова пространства E^n следующим образом. Пусть E^k – подпространство пространства E^n , а $\mathbf{x}$ – некоторый вектор из E^n . Тогда наименьшее значение величины $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ среди

всех векторов y из E^k достигается на единственном векторе, являющемся ортогональной проекцией вектора x на подпространство E^k , и оно равно длине ортогональной составляющей x относительно E^k . Этот факт носит название

Теорема 3 (о минимальности расстояния).

$$\forall x \in E^n, E^k \subset E^n \quad \rho(x, E^k) = |x - \text{пр}_{E^k} x| = \min_{y \in E^k} |x - y|.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= (x - y, x - y) = (\text{пр}_{E^k} x + x_{\perp} - y, \text{пр}_{E^k} x + x_{\perp} - y) = \\ &= (\text{пр}_{E^k} x - y, \text{пр}_{E^k} x - y) + \underbrace{(\text{пр}_{E^k} x - y, x_{\perp})}_{=0} + \underbrace{(x_{\perp}, \text{пр}_{E^k} x - y)}_{=0} + (x_{\perp}, x_{\perp}) = \\ &= |\text{пр}_{E^k} x - y|^2 + |x_{\perp}|^2 \geq |x_{\perp}|^2, \end{aligned}$$

равенство имеет место при $y = \text{пр}_{E^k} x$. ■

УПРАЖНЕНИЕ

9. Вектор x и система векторов f_1, f_2 евклидова пространства заданы в некотором ОНБ пространства координатными столбцами $\xi = (1, 1, 0)^T$, $a_1 = (0, 1, -1)^T$, $a_2 = (1, 1, 1)^T$ соответственно, L – линейная оболочка векторов f_1, f_2 . Найти величину $\delta = \inf_{y \in L} |x - y|$.

Ответ: $1/\sqrt{6}$

Задачи для самостоятельного решения

№1. 1) Для векторов евклидова пространства установить теорему, обратную теореме Пифагора: если $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$, то векторы f_1 и f_2 ортогональны.

2) Показать, что для унитарного пространства такая теорема не верна.

Найти условия на векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, при которых $|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2 + |\mathbf{f}_2|^2$.

№2. 1) Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \dots, \eta_n$ – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе n -мерного евклидова пространства. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вычисляется по формуле $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n$ в том и только в том случае, когда этот базис является ортонормированным.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для унитарного пространства.

№3. Система векторов задана в ОНБ евклидова пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов:

а) $(3, -1, -2)^T$, $(4, 0, -1)^T$, $(5, 1, 0)^T$;

б) $(1, 2, -1, 1)^T$, $(-5, -5, 4, -2)^T$, $(-3, 6, 2, 0)^T$.

№4. Систему векторов $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированного базиса.

№5. Подпространство L евклидова пространства задано в некотором ОНБ системой линейных уравнений. Найти какой-либо ОНБ в L .

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0,$$

$$x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0.$$

№6. Дано евклидово пространство многочленов степени не выше 3, заданных на отрезке $[-1, 1]$, со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

Построить систему векторов, биортогональную системе $1, t, t^2$ и принадлежащую линейной оболочке этих векторов.

№7. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ОНБ ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $(1, 3, -1, 1)^T$, $(2, 5, -2, 3)^T$.

№8. Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты $x_1, \dots, x_n$ которых в некотором ОНБ евклидова пространства удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

№9. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

№10. Найти коэффициенты тригонометрического многочлена

$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, доставляющего наименьшее значение

интегралу $\int_{-\pi}^{\pi} (|t| - T_n(t))^2 dt$. Вычислить это значение.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

№1. 2) $|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2 + |\mathbf{f}_2|^2$ равносильно $\operatorname{Re}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$. Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_1 = i\mathbf{x}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{x}$, то $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$, но $\operatorname{Re}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$.

№2. 2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n$. №3. а) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$;

б) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(-2, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(0, 2, 1, -3)^T$.

№4. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)^T$.

№5. Базис в L образуют, например, векторы с координатными столбцами

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1, 0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)^T. \quad \text{№6. } \frac{3}{8}(3-5t^2), \quad \frac{3}{2}t, \quad -\frac{15}{8}(1-3t^2).$$

$$\text{№7. Например: } \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)^T.$$

№8. Искомый базис образуют, например, векторы с координатными столбцами

$$(0, 1, 1, -1)^T, \quad (1, 0, -2, 3)^T.$$

$$\text{№9. Например, } x_1 + x_2 = 0, \quad 2x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

$$\text{№10. } a_0 = \frac{\pi}{2}; \quad a_k = 2 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}; \quad b_k = 0; \quad \frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (2k+1)^{-4}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Все сказанное о линейных преобразованиях линейных пространств справедливо и для евклидовых и унитарных пространств. С введением понятия скалярного умножения линейные преобразования приобретают новые свойства и способы описания.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Линейное преобразование φ переводит ОНБ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в систему векторов

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$. Доказать, что $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \mathbf{f}_j$ для любого вектора $\mathbf{x}$.

2. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ – ОНБ подпространства L . Выразить, используя скалярные произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k)$ образ произвольного вектора $\mathbf{x}$ для оператора:

1) ортогонального проектирования на подпространство L ;

$$\text{ответ: } \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j;$$

2) ортогонального проектирования на подпространство $L^\perp$;

$$\text{ответ: } \mathbf{x} - \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j;$$

3) ортогонального отражения в подпространстве L ;

$$\text{ответ: } 2 \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j - \mathbf{x};$$

4) ортогонального отражения в подпространстве $L^\perp$;

$$\text{ответ: } \mathbf{x} - 2 \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j.$$

3. Подпространство L задано системой уравнений $(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) = 0, \dots, (\mathbf{x}, \mathbf{n}_k) = 0$, где $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ – некоторая ортонормированная система векторов. Выразить, используя скалярные произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1), \dots, (\mathbf{x}, \mathbf{n}_k)$, образ произвольного вектора $\mathbf{x}$ для оператора:

1) ортогонального проектирования на подпространство L ;

$$\text{ответ: } \mathbf{x} - \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j;$$

2) ортогонального отражения в подпространстве $L^\perp$;

$$\text{ответ: } \mathbf{x} - 2 \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j.$$

4. В базисе $\mathbf{e}$ найти матрицу ортогонального проектирования на линейное подпространство L , если оно натянуто на вектор, заданный в этом базисе координатным столбцом $(1, 2, 1, -2)^T$.

$$\text{Ответ: (использовать результат задачи 2.1)) } \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

СОПРЯЖЕННЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Оператор φ^* евклидова или унитарного пространства называется *сопряженным* линейному оператору φ , если для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})). \quad (1)$$

Установим связь между матрицами сопряженных операторов A и A^* .

Координатный столбец образа $\varphi(\mathbf{x})$ имеет вид AX . Запишем скалярное произведение в матричной форме:

$$\text{в } E^n: (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (AX)^T \Gamma Y = X^T A^T \Gamma Y = X^T \Gamma A^* Y = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y}));$$

$$\text{в } U^n: (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (AX)^T \Gamma \bar{Y} = X^T A^T \Gamma \bar{Y} = X^T \Gamma \overline{A^* Y} = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})).$$

Получаем

$$\text{в евклидовом пространстве } A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma;$$

$$\text{в унитарном пространстве } A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma.$$

Утверждение 7. Каждый линейный оператор евклидова или унитарного пространства имеет единственный сопряженный оператор.

Доказательство. Пусть оператор φ имеет матрицу A . Возьмем оператор ψ с матрицей $B = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$. Проверим выполнение равенства (1):

$$\text{Левая часть: } (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (AX)^T \Gamma \bar{Y} = X^T A^T \Gamma \bar{Y};$$

$$\text{Правая часть: } (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{y})) = X^T \Gamma \overline{BY} = X^T \Gamma \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma Y} = X^T A^T \Gamma \bar{Y}.$$

Таким образом, получаем $\psi = \varphi^*$.

Докажем единственность. Пусть $\psi_1 = \varphi^*$, $\psi_2 = \varphi^*$, тогда

$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \psi_2(\mathbf{y}))$, т.е. $(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{y}) - \psi_2(\mathbf{y})) = 0 \quad \forall \mathbf{x}$. Если взять $\mathbf{x} = \psi_1(\mathbf{y}) - \psi_2(\mathbf{y})$, получим $|\psi_1(\mathbf{y}) - \psi_2(\mathbf{y})| = 0 \Rightarrow \psi_1(\mathbf{y}) = \psi_2(\mathbf{y})$. ■

Следствие. 1) $(\varphi^*)^* = \varphi$; 2) $(\varphi\psi)^* = \psi^* \varphi^*$.

Доказательство.

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) = \overline{(\varphi^*(\mathbf{y}), \mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y}, \varphi^*(\varphi^*(\mathbf{x})))} = (\varphi^*(\varphi^*(\mathbf{x})), \mathbf{y})$,
т.е. $(\varphi^*)^* = \varphi$.

2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad ((\varphi\psi)(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\varphi(\psi(\mathbf{x})), \mathbf{y}) = (\psi(\mathbf{x}), \varphi^*(\mathbf{y})) =$
 $= (\mathbf{x}, \psi^*(\varphi^*(\mathbf{y}))) = (\mathbf{x}, (\psi^* \varphi^*)(\mathbf{y})),$

т.е. $(\varphi\psi)^* = \psi^* \varphi^*$. ■

Определение. Оператор евклидова или унитарного пространства называется *самосопряженным*, если $\varphi^* = \varphi$.

Замечание 1. В ОНБ матрица сопряженного оператора $A^* = A^T$ для евклидова пространства и $A^* = \overline{A^T}$ для унитарного. Следовательно, в ОНБ матрица самосопряженного оператора симметрична (т.е. ее элементы обладают свойством $a_{ij} = a_{ji}$) для евклидова пространства и эрмитова (т.е. ее элементы обладают свойством $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$) для унитарного.

Замечание 2. Преобразования, обладающие свойством самосопряженности, изначально возникли в квантовой механике. Там они были введены в форме операторов, т.е. символов, показывающих, каким способом каждой из рассматриваемого класса функций сопоставляется другая функция. Физически осмысленными и удобными оказались самосопряженные операторы: каждой механической величине был сопоставлен такой оператор. В квантовой механике постулируется, что совокупность собственных значений оператора тождественна с совокупностью всех возможных результатов измерения физической величины, изображаемой этим оператором, что

соответствует идее квантования. Математический аппарат квантовой механики развивается в комплексном пространстве, а физические величины имеют вещественные значения. Связь между ними и их математическим описанием устанавливается благодаря свойствам самосопряженных операторов.

Теорема 4 (свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора).

- 1) Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны;
- 2) собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Рассмотрим самосопряженный оператор φ и его собственный вектор $\mathbf{x}$, отвечающий собственному значению λ .

1) В U^n : $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ и $(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = (\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, значит, $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. вещественно.

В E^n : пусть λ – корень уравнения $\det(\Phi - \lambda E) = 0$, т.е. $\Phi X = \lambda X$, X – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$, $\bar{\Phi} = \Phi$, $\Phi^T = \Phi$, т.к. оператор самосопряженный, а пространство евклидово. Допустим, λ и X получились комплексные.

$$\text{Рассмотрим } \bar{X}^T \Phi X = \lambda \bar{X}^T X = \lambda \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}_{\in \mathbb{R}}. \quad (*)$$

Покажем, что матрица-число $\bar{X}^T \Phi X \in \mathbb{R}$.

$$\bar{X}^T \Phi X = (\bar{X}^T \Phi X)^T = X^T \Phi^T \bar{X} = X^T \Phi \bar{X},$$

т.к. оператор самосопряженный и $\Phi^T = \Phi$,

$$\overline{\bar{X}^T \Phi X} = X^T \bar{\Phi} \bar{X} = X^T \Phi \bar{X}, \text{ т.к. пространство вещественно и } \bar{\Phi} = \Phi.$$

Получили, что $\bar{X}^T \Phi X = \overline{\bar{X}^T \Phi X}$, т.е. вещественно, а оно представляет собой левую часть равенства (*), значит, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Итак, характеристическое уравнение для самосопряженного оператора не может иметь комплексных корней.

$$2) \varphi(\mathbf{x}_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1, \varphi(\mathbf{x}_2) = \lambda_2 \mathbf{x}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

$$(\varphi(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) = \lambda_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, \varphi^*(\mathbf{x}_2)) = (\mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$, т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ортогональны. ■

Из доказанной теоремы следует, что любой самосопряженный оператор имеет хотя бы один собственный вектор. И даже более того,

Теорема 5 (основное свойство самосопряженного оператора).

Любой самосопряженный оператор имеет ОНБ из собственных векторов.

Доказательство. Индукция по размерности пространства:

1) В E^1 : $\forall \mathbf{x} \quad \varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, возьмем $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

2) Пусть построен ОНБ из собственных векторов в E^n .

3) Рассмотрим самосопряженный оператор пространства E^{n+1} . Поскольку у него существует хотя бы один собственный вектор, то нормируем его, обозначим $\mathbf{e}_{n+1}$ и построим линейную оболочку $L(\mathbf{e}_{n+1})$. Это будет одномерное инвариантное подпространство E^1 . Обозначим $\hat{E}$ его ортогональное дополнение до E^{n+1} , оно имеет размерность n (по Утверждению

б) и является инвариантным подпространством оператора φ , т.к.

$$\forall \mathbf{y} \in \hat{E} \quad (\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{e}_{n+1}) = (\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{e}_{n+1})) = \lambda_{n+1}(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{n+1}) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{y}) \in \hat{E}, \quad \text{т.е.}$$

$\hat{E} \xrightarrow{\varphi} \hat{E}$. Если рассмотреть φ только на нем, то по предположению индукции существует ОНБ из собственных векторов $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n$. Рассматривая их как векторы в E^{n+1} и добавляя $\mathbf{e}_{n+1}$, получим ОНБ в E^{n+1} . ■

Определение. Линейный оператор евклидова или унитарного пространства называют *ортогональным* или *унитарным оператором* если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$.

Из определения следует, что ортогональный и унитарный операторы сохраняют скалярное произведение, длины векторов и углы между ними.

Утверждение 8. Оператор является ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, когда для него существует обратный оператор, равный его сопряженному оператору.

Доказательство. Пусть оператор $\varphi(\mathbf{x})$ ортогональный, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\varphi(\mathbf{y})))$, откуда имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \varphi^*(\varphi(\mathbf{y}))) = 0$, т.е. $\mathbf{y} = \varphi^*(\varphi(\mathbf{y}))$ и $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Обратно. Если $\varphi^* = \varphi^{-1}$, то $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\varphi(\mathbf{y}))) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, что означает его ортогональность. ■

Следствие. В ОНБ матрица ортогонального оператора ортогональна, унитарного оператора – унитарна.

Проверить самостоятельно!

Утверждение 9. Ортогональный (унитарный) оператор и только он переводит ОНБ в ОНБ.

Доказательство. вытекает из Утверждения 5 и Следствия Утверждения 8. ■

Теорема 6 (основное свойство унитарного оператора).

Любой унитарный оператор имеет ОНБ из собственных векторов. Все собственные значения по модулю равны единице.

Доказательство. Первое утверждение доказывается так же, как Теорема 5 для самосопряженного оператора. Докажем второе.

Пусть λ – собственное число ортогонального (унитарного) оператора, т.е. $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda\bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\lambda|^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \text{ т.е. } |\lambda| = 1. \blacksquare$$

Замечание. Аналогично доказывается, что все собственные значения ортогонального оператора по модулю равны единице. Правда ОНБ из собственных векторов может не быть (почему?).

УПРАЖНЕНИЯ

1.а) Приведите примеры ортогональных операторов в E^2 . Как выглядят их матрицы?

б) Как устроена матрица ортогонального оператора в E^n ?

2. Найти оператор, сопряженный оператору φ евклидовой векторной плоскости, если φ – ортогональное проектирование на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} \neq \theta$. Является ли он самосопряженным? Является ли ортогональным?

Ответ: $\varphi^* = \varphi$; да; нет.

3. Пусть A – матрица линейного оператора евклидова пространства в некотором базисе, Γ – матрица Грама этого базиса. Найти матрицу A^* сопряженного оператора в том же базисе, если: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора φ , заданного в некотором ОНБ матрицей: $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ответ: } \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 5, \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T.$$

Теорема 7 (полярное разложение).

Любой невырожденный ($\text{Ker } \varphi = \{\mathbf{0}\}$) оператор унитарного пространства можно представить в виде произведения самосопряженного и унитарного оператора: $\varphi = \psi T$, $\psi = \psi^*$, $T^{-1} = \bar{T}^T$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\alpha = \varphi\varphi^*$.

Он самосопряженный: $\alpha^* = (\varphi\varphi^*)^* = (\varphi^*)^* \varphi^* = \varphi\varphi^* = \alpha$.

Значит, у него есть ОНБ из собственных векторов:

$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\alpha(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \forall i$. Найдем λ_j :

$$(\varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \varphi^* \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \lambda_j \mathbf{e}_j) = \lambda_j \delta_{ij},$$

т.е. $\lambda_j = |\varphi(\mathbf{e}_j)|^2 > 0$, т.к. $\varphi(\mathbf{e}_j) \neq \mathbf{0}$.

Попутно выяснилось, что векторы $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$ попарно ортогональны.

Нормируем их и получим ОНБ $\mathbf{f}_i = \varphi(\mathbf{e}_i) / |\varphi(\mathbf{e}_i)|$, $i = 1, \dots, n$.

Оператор, переводящий ОНБ $\mathbf{e}$ в ОНБ $\mathbf{f}$, – унитарный (по Утверждению 9).

Обозначим его T ($T^{-1} = \bar{T}^T$).

Рассмотрим оператор $\psi = \varphi T^{-1}$. $\psi(\mathbf{f}_i) = \varphi(T^{-1}(\mathbf{f}_i)) = \varphi(\mathbf{e}_i) = |\varphi(\mathbf{e}_i)| \mathbf{f}_i$.

Получили, что в базисе $\mathbf{f}$ его матрица диагональная, т.е. симметричная, имеется

ОНБ из собственных векторов $\mathbf{f}$ с действительными собственными значениями.

Таковыми свойствами обладает самосопряженный оператор. Т.о. $\varphi = \psi T$. ■

Замечание. Строго говоря, в доказательстве Теоремы 7 было показано лишь то, что всякую невырожденную матрицу можно представить в виде произведения симметричной и унитарной матриц. Если их рассматривать как матрицы соответствующих линейных операторов в некотором ОНБ, получим

геометрическую интерпретацию доказанного факта, которая и была дана в виде формулировки Теоремы 7.

УПРАЖНЕНИЕ

Найти полярное разложение оператора φ , заданного в ОНБ евклидова

пространства матрицей: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\text{Ответ: } \varphi = \psi T, \quad \Psi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

№1. Линейное подпространство L четырехмерного евклидова пространства E в некотором ОНБ e задано системой линейных $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$, уравнений. Найти в том же базисе матрицу $3\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0$. ортогонального проектирования на L .

№2. Найти оператор, сопряженный оператору φ евклидовой векторной плоскости, если:

а) φ – ортогональное отражение в подпространстве, натянутом на вектор $a \neq 0$.

б) φ – поворот плоскости на угол α по часовой стрелке.

№3. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 выбран ОНБ e_1, e_2, e_3 . Найти оператор φ^* , сопряженный оператору φ пространства E_3 , если φ – поворот вокруг оси, определяемой вектором $f = e_1 + e_2 + e_3$ на угол $2\pi/3$. Найти матрицу оператора.

№4. Определить, является ли самосопряженным (либо найти условия, при которых является самосопряженным) линейный оператор

1) ортогонального проектирования евклидовой плоскости на линейную оболочку вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

2) задачи №3.

№5. Определить, является ли (либо найти условия, при которых является) ортогональным или унитарным оператор φ

1) задачи №2 а), 2) задачи №2 б), 3) задачи №3.

№6. Оператор евклидова пространства многочленов степени не выше 2 со

скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$ ставит в соответствие

многочлену его производную. Найти матрицу сопряженного оператора в базисе $1, t, t^2$.

№7. Пусть L – инвариантное подпространство линейного оператора φ .

Доказать, что ортогональное дополнение $L^\perp$ подпространства L является инвариантным подпространством сопряженного оператора φ^* .

№8(р). Может ли матрица самосопряженного оператора евклидова пространства в некотором базисе быть несимметричной?

№9. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора φ , заданного в некотором ОНБ матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№10*. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов оператора, являющегося

- а) гомотетией с коэффициентом k ;
- б) ортогональным проектированием на подпространство L ;
- в) ортогональным отражением в подпространстве L .

№11. Пусть L – ненулевое линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства. Является ли ортогональным (унитарным) оператором:

- а) ортогональное проектирование на L ?
- б) ортогональное отражение в подпространстве L ?

№12. Линейный оператор φ евклидова пространства переводит систему векторов, заданных в некотором ОНБ координатными столбцами $\mathbf{a}_1 = (3, 4)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3)^T$, в систему векторов, заданных в том же базисе координатными столбцами $\mathbf{b}_1 = (5, 0)^T$, $\mathbf{b}_2 = (3, 1)^T$ соответственно. Проверить, является ли оператор φ ортогональным.

№13. Пусть A – матрица линейного оператора φ в некотором базисе, Γ – матрица Грама этого базиса. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы φ был:

- а) ортогональным оператором евклидова пространства;
- б) унитарным оператором унитарного пространства?

Отдельно рассмотреть случай, когда базис ортонормированный.

№14. Может ли ортогональный оператор:

- 1) не иметь собственных векторов;
- 2) обладать базисом из собственных векторов;
- 3) иметь по крайней мере один собственный вектор, но не иметь базиса из собственных векторов?

Привести соответствующие примеры.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

$$\text{№1. } \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

№2. а) $\varphi^* = \varphi$; б) $\varphi^* = \varphi^{-1}$. №3. $\varphi^* = \varphi^{-1}$. №4. 1) является; 2) нет.

$$\text{№5. 1), 2), 3) является. } \quad \text{№6. } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

№8. *Решение.* В ортонормированном базисе не может, т.к. $\Gamma = E$ и получается $A^* = A^T$. А, поскольку преобразование самосопряженное, $A^* = A$, значит, $A = A^T$. Рассмотрим преобразование с несимметричной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в

неортонормированном базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 1)^T$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0)^T$. Убедимся в том, что оно

самосопряженное. $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\varphi^*(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) &= 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + (x_1 + x_2)y_1 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + (x_1 + x_2)y_2 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \\ &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) &= 0 \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1(y_1 + y_2) \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0 \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2(y_1 + y_2) \cdot (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \\ &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

$$\text{№9. а) } \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T; \quad \text{б) } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T,$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

№10*. а) Все собственные значения равны k , ортонормированный базис из собственных векторов – произвольный ОНБ пространства;

б) собственному значению $\lambda = 1$ отвечает произвольный ОНБ в L , собственному значению $\lambda = 0$ – произвольный ОНБ в $L^\perp$;

в) собственному значению $\lambda = 1$ отвечает произвольный ОНБ в L , собственному значению $\lambda = -1$ – произвольный ОНБ в $L^\perp$.

№11. а) Нет; б) является. №12. Является. №13. а) $A^T \Gamma A = \Gamma$; б) $\bar{A}^T \bar{\Gamma} A = \bar{\Gamma}$.

Если базис ортонормирован, то: а) $A^T A = E$; б) $\bar{A}^T A = E$. №14. 1), 2), 3) Может.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ (ФУНКЦИИ)

Определение. *Линейной формой* называется линейное отображение линейного n -мерного пространства в одномерное арифметическое пространство вещественное или комплексное.

Разумеется, оба свойства линейности отображения справедливы и для линейной формы: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$; $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n, \quad \forall \alpha$.

ПРИМЕРЫ.

- 1) В геометрическом пространстве векторов выберем произвольный фиксированный вектор. Всем остальным векторам сопоставим их скалярное произведение с выбранным. Это будет линейная функция.
- 2) В арифметическом пространстве $f^i(\mathbf{x}) = x_i, \quad i = 1, \dots, n$.
- 3) В пространстве непрерывных на отрезке $[-a, a]$ функций форма, сопоставляющая каждой функции ее значение в начале координат, – линейная форма.

Определение. Пусть дана линейная форма $f : L^n \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$. В одномерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ базис фиксирован: (1). Пусть в пространстве L^n базис $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Любой линейной функции соответствует *координатная строка* в $\mathbf{e}$: $f \leftrightarrow F = (f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$. Она состоит из образов базисных векторов $\mathbf{e}_j$ и играет роль матрицы отображения, ее размер, $1 \times n$.

Тогда для любого вектора $\mathbf{x}$ с координатным столбцом X , $f(\mathbf{x}) = FX$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. 1) Сопоставим каждому столбцу высоты n отношение первых двух его элементов. Будет ли этим определена функция на R_n ?

Ответ: нет.

2) Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму квадратов всех его элементов. Будет ли этим определена линейная функция на R_n ?

Ответ: нет.

3) Сопоставим каждому столбцу высоты n его i -й элемент. Доказать, что этим определена линейная функция на R_n , и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства R_n .

Ответ: $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i -м месте).

4) Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму его элементов. Доказать, что этим определена линейная функция на R_n , и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства R_n .

Ответ: $(1, \dots, 1)$.

2. Функция $\text{tr } X$ сопоставляет каждой квадратной матрице X порядка n ее след – сумму диагональных элементов. Проверить, что эта функция является линейной, и найти ее координатную строку (координатную матрицу) в стандартном базисе пространства матриц.

Ответ: E_n .

3. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $n \leq 3$ число $f(p) = \int_{-1}^1 (1+t^2)p(t) dt$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $P^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1, t, t^2, t^3$.

Ответ: $(8/3, 0, 16/15, 0)$.

4. Пусть k – натуральное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени не выше n значение его k -й производной при $t=0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $P^{(n)}$. Вычислить ее координатную строку в базисе $1, t, \dots, t^n$.

Ответ: $(0, \dots, 0, k!, 0, \dots, 0)$ ($k!$ на $k+1$ -м месте при $k \leq n$); $(0, \dots, 0)$ при $k > n$.

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть C – квадратная матрица порядка n . Сопоставим каждой квадратной матрице X порядка n число $\text{tr}(CX)$. ($\text{tr} A$ – след матрицы A ; определяется как сумма диагональных элементов матрицы.) Показать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathbb{R}_{n \times n}$, и найти ее координатную строку (координатную матрицу).

№2. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $n \leq 3$ число

$$f(p) = \int_0^1 p(t^2) dt. \text{ Доказать, что этим определена линейная функция на}$$

пространстве многочленов $P^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1, t, t^2, t^3$.

№3. Пусть k – натуральное число, $k \leq n$, t_0 – вещественное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени не выше n значение его k -й производной при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $P^{(n)}$. Вычислить ее координатную строку в базисах:

$$\text{а) } 1, t, \dots, t^n; \quad \text{б) } 1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n.$$

№4. Подпространство $\mathbb{N}$ в L_5 задано в некотором базисе как линейная оболочка векторов с координатными столбцами $(0, 0, 1, 1, 1)^T$, $(0, 1, 0, 0, 1)^T$.

Найти в том же базисе координатные строки всех линейных функций, обращающихся в ноль на $\mathbb{N}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

- №1. C^T . №2. $(1, 1/3, 1/5, 1/7)$. №3. а) $(\chi_0, \dots, \chi_n)$ где $\chi_i = 0$ при $i \leq k$ и $\chi_i = i(i-1)\dots(i-k)t_0^{i-k-1}$ при $i > k$; б) $(0, \dots, 0, k!, 0, \dots, 0)$, ($k!$ на $(k+1)$ -м месте).
- №4. $(c_1, c_3, c_3 - c_2, c_2, -c_3)$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа.

БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Определение. *Билинейной формой* или *билинейной функцией* на линейном пространстве будем называть функцию от двух векторов $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, линейную по каждому из своих аргументов, т.е. $\forall \alpha, \beta, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$

$$b(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha b(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta b(\mathbf{y}, \mathbf{z}); \quad b(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) = \alpha b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta b(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

В координатном представлении $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b\left(\sum x_i \mathbf{e}_i, \sum y_j \mathbf{e}_j\right) = X^T B \bar{Y}$, где B – *матрица билинейной формы*, ее элементы $b_{ij} = b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Простейшим примером билинейной формы является скалярное произведение. Тогда B – матрица Грама.

Утверждение 1. Матрица билинейной формы меняется при замене базиса так же, как матрица Грама: $B' = S^T B S$, где S – матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$.

Доказательство. Такое же, как для матрицы Грама (Утверждение 3 Главы «Евклидовы и унитарные пространства») ■

Определение. Билинейную форму называют *симметричной (эрмитовой)*, если для любой пары векторов $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{b(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$.

Скалярное произведение – симметричная (эрмитова) билинейная форма.

Утверждение 2. Билинейная форма симметрична (эрмитова) тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе симметрична (эрмитова).

Доказательство. Пусть билинейная форма симметрична, тогда $b_{ij} = b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{b(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)} = \overline{b_{ji}}$, т.е. $B = \bar{B}^T$ ($B = B^T$).

Обратно. Рассмотрим $\overline{b(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{Y^T B \bar{X}} = \bar{Y}^T \bar{B} X$. Последнее выражение представляет собой матрицу размера 1×1 , т.е. число, которое не меняется при транспонировании:

$$\bar{Y}^T \bar{B} X = (\bar{Y}^T \bar{B} X)^T = X^T \bar{B}^T \bar{Y} = X^T B \bar{Y} = b(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ т.е. форма симметричная. } \blacksquare$$

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Пусть $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – симметричная билинейная форма, тогда $k(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ – *квадратичная форма*.

Матрица квадратичной формы совпадает с матрицей симметричной билинейной формы и $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X}$.

УПРАЖНЕНИЕ

Показать, что по k однозначно определяется симметричная билинейная форма $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}(k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - k(\mathbf{x} - \mathbf{y}))$.

Определение. Если в некотором базисе квадратичная форма имеет вид $k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, то этот вид называют *диагональным*.

Матрица квадратичной формы в данном случае диагональна $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Если все $\lambda_i = \pm 1, 0$, вид квадратичной формы называют *каноническим*.

Определение. Количество ненулевых коэффициентов в диагональном виде квадратичной формы называют ее *рангом*.

Полезно заметить, что $rg\ k(\mathbf{x}) = rg\ B$.

Определение. Количество положительных (отрицательных) коэффициентов в диагональном виде квадратичной формы называют ее *положительным (отрицательным) индексом* r_+ (r_-).

$$rg\ k = r_+ + r_-.$$

Определение. Разность положительного и отрицательного индекса квадратичной формы называют ее *сигнатурой*.

Теорема 1 (закон инерции квадратичной формы).

Число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в диагональном виде квадратичной формы одинаково во всех базисах.

Доказательство. Пусть

$$k(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_l x_l^2 - \lambda_{l+1} x_{l+1}^2 - \lambda_{l+2} x_{l+2}^2 - \dots - \lambda_{l+m} x_{l+m}^2;$$

$$k(\mathbf{x}) = \mu_1 x_{p+1}^2 + \mu_2 x_{p+2}^2 + \dots + \mu_p x_{p+p}^2 - \mu_{p+1} x_{p+1}^2 - \mu_{p+2} x_{p+2}^2 - \dots - \mu_{p+q} x_{p+q}^2.$$

Все $\lambda_i, \mu_j > 0$.

Рассмотрим линейные оболочки $L_+ = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l)$, $L'_- = L(\mathbf{e}'_{p+1}, \dots, \mathbf{e}'_n)$.

Предположим $l > p$ ($l - p > 0$). Тогда $n < l + n - p = \dim L_+ + \dim L'_-$. Значит,

сумма L_+ и L'_- не прямая, т.е. $\exists \mathbf{z} \in L_+ \cap L'_-$:

$k(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_l z_l^2 > 0$ и в то же время

$k(\mathbf{z}) = -\mu_{p+1} z_{p+1}^2 - \mu_{p+2} z_{p+2}^2 - \dots - \mu_{p+q} z_{p+q}^2 \leq 0$, чего быть не может, значит, $l \leq p$.

Аналогично рассматривается $l < p$. В результате устанавливается $l = p$.

Рассмотрев $-k(\mathbf{x})$, получим совпадение количества отрицательных коэффициентов. Значит, равны и количества нулевых коэффициентов. ■

Т.о. индексы, ранг и сигнатура квадратичной формы не зависят от базиса, в котором она приведена к диагональному виду. Алгоритм приведения квадратичной формы к диагональному виду изложен в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2 (о приведении квадратичной формы к диагональному виду).

Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет диагональный вид.

Доказательство. (Метод выделения полных квадратов – метод Лагранжа). Индукция по размерности пространства.

В E^1 $k(\mathbf{x}) = \lambda x^2$, вид диагональный.

Предположим, что в E^{n-1} существует базис, в котором $k(\mathbf{x}) = \hat{k}(\hat{\mathbf{x}})$ имеет диагональный вид.

Рассмотрим в E^n $k(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$. Выделим слагаемые, содержащие x_1 :

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=2}^n b_{ij} x_i x_j + b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n b_{i1} x_i.$$

Случай А: $b_{11} \neq 0$.

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}) &= \sum_{i,j=2}^n b_{ij} x_i x_j + b_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{i1}}{b_{11}} x_i + \left(\sum_{i=2}^n \frac{b_{i1}}{b_{11}} x_i \right)^2 \right) - \frac{1}{b_{11}} \left(\sum_{i=2}^n b_{i1} x_i \right)^2 = \\ &= b_{11} \left(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{i1}}{b_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n \tilde{b}_{ij} x_i x_j = b_{11} (x'_1)^2 + \sum_{i,j=2}^n \tilde{b}_{ij} x'_i x'_j. \end{aligned}$$

Где новые координаты $\begin{cases} x'_1 = x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{i1}}{b_{11}} x_i; \\ x'_j = x_j, \quad j = 2, \dots, n, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x_1 = x'_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_{i1}}{b_{11}} x'_i; \\ x_j = x'_j, \quad j = 2, \dots, n; \end{cases}$

матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{21}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{n1}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, новый базис $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1; \\ \mathbf{e}'_j = -\frac{b_{j1}}{b_{11}} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_j. \end{cases}$

По предположению индукции в E^{n-1} существует базис $(\mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_n)$, в котором

квадратичная форма $\hat{k}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i,j=2}^n \tilde{b}_{ij} x'_i x'_j = \sum_{j=2}^n \lambda_j x'^2_j$, т.е. имеет диагональный

вид. Т.о. в E^n имеем базис $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_n)$, в котором $k(\mathbf{x}) = b_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^n \lambda_j x_j'^2$,

т.е. диагональна.

Случай Б: $b_{ii} = 0 \quad \forall i$.

При этом обязательно найдется $b_{1k} \neq 0$; сделаем замену координат:

$$x_1 = x'_1 - x'_k; \quad x_k = x'_1 + x'_k; \quad x_i = x'_i \quad i \neq 1, k.$$

Тогда $k(\mathbf{x}) = b_{1k}(x_1'^2 - x_k'^2) + \sum_{i,j \neq 1,k}^n b_{ij} x_i' x_j'$ и имеет вид, рассмотренный в

случае А.

Случай В: $b_{1i} = b_{i1} = 0 \quad \forall i$.

Это означает, что $k(\mathbf{x}) = \hat{k}(\hat{\mathbf{x}})$ определена на $n-1$ -мерном подпространстве.

Там существует базис $(\mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$, в котором она диагональна (случай А или

Б). Так что в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$ $k(\mathbf{x}) = 0 \cdot x_1'^2 + \sum_{j=2}^n \lambda_j x_j'^2$, т.е. также

диагональна. ■

Следствие. Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

Доказательство. Пусть квадратичная форма приведена к диагональному виду $k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j'^2$. Тогда для координат с ненулевыми λ_j

сделаем замену: $x''_j = \sqrt{|\lambda_j|} x'_j$, $\mathbf{e}''_j = \mathbf{e}'_j / \sqrt{|\lambda_j|}$ и $k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \text{sign} \lambda_j \cdot x_j''^2$, т.е.

принимает канонический вид. ■

Замечание. Преобразования координат в методе Лагранжа эквивалентны преобразованиям матрицы квадратичной формы, применяемым в методе Гаусса. Отличие состоит в том, что каждое элементарное

преобразование, выполняемое над строкой, сразу же повторяется для столбца с тем же номером. Так что элементарные преобразования строк и столбцов матрицы квадратичной формы – это альтернативный способ приведения ее к диагональному виду.

Определение. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $\forall \mathbf{x} \neq \theta \quad k(\mathbf{x}) > 0$, *отрицательно определенной*, если $\forall \mathbf{x} \neq \theta \quad k(\mathbf{x}) < 0$; *положительно или отрицательно полуопределенной*, если $\forall \mathbf{x} \neq \theta \quad k(\mathbf{x}) \geq 0$ или $\forall \mathbf{x} \neq \theta \quad k(\mathbf{x}) \leq 0$ соответственно. На нулевом подпространстве каждая квадратичная форма определена и положительно и отрицательно одновременно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в трехмерном линейном пространстве:

$$x_1 y_2 - 3x_1 y_3 + 7x_2 y_3 + x_2 y_1 - 3x_3 y_1 + 7x_3 y_2 + x_3 y_3.$$

2. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду двумя способами: с помощью метода Лагранжа и с помощью элементарных преобразований ее матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

а) $2x_1^2 + 8x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$; ответ: $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$.

б) $x_1^2 - 2x_1 x_3 + x_2^2 - 2x_2 x_4 + x_3^2 - 2x_3 x_5 + x_4^2 - 2x_4 x_6 + x_5^2 + x_6^2$;
ответ: $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 - x_5'^2 - x_6'^2$.

в) $x_1 x_2 + 2x_2 x_3 - 3x_3 x_4$; ответ: $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$.

3. Выяснить, какие квадратичные формы задачи 2 являются положительно, отрицательно определенными, полуопределенными в зависимости от размерности пространства.

4. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$ положительно, отрицательно определена или полуопределена?

Ответ: положительно при $\lambda > 1$, неотрицательно при $\lambda = 1$, отрицательно при $\lambda < -4$, неположительно при $\lambda = -4$.

Понятно, что знакоопределенность квадратичной формы, приведенной к диагональному виду, устанавливается устно. Что можно сказать о знакоопределенности формы, не приводя ее к диагональному виду? На этот вопрос дает ответ критерий Сильвестра:

Теорема 3 (критерий Сильвестра).

Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительны:

$$M_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad k(\mathbf{x}) > 0$. Это неравенство выполнено и для любого базисного вектора, т.е. все $b_{ii} = k(\mathbf{e}_i) > 0$. Значит, при приведении формы к диагональному виду будем иметь дело только со случаем А. В процессе приведения матрицы к диагональному виду осуществляются элементарные преобразования строк и столбцов, которые не меняют главных миноров. В получающейся в результате диагональной матрице все главные миноры положительны. Поэтому они положительны и у исходной матрицы.

Достаточность. Пусть все главные миноры положительны. В частности, положителен и первый $b_{11} > 0$. Тогда на первом шаге приведения формы к

диагональному виду получим $\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$, где B_{n-1} – симметричная

матрица квадратичной формы, определенная на подпространстве размерности на единицу меньшей.

Допустим, выполнено k шагов и получена матрица $\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \tilde{b}_{kk} & \\ 0 & & & B_{n-k} \end{pmatrix}$

с положительными диагональными элементами $b_{11}, \tilde{b}_{22}, \dots, \tilde{b}_{kk}$, причем не возникало случаев Б и В. Главные миноры порядка k и $k+1$ представляют собой произведение, соответственно, k и $k+1$ элементов главной диагонали матрицы $\tilde{B}$. Тогда для первого элемента первой строки матрицы B_{n-k} имеем $\tilde{b}_{k+1,k+1} = M_{k+1} / M_k > 0$, т.к. миноры не менялись. Т.е. на произвольном шаге будем иметь случай А и дойдем так до последнего элемента, который окажется положительным, а вместе с ним и квадратичная форма – положительной. ■

Заметим, что матрицу любой положительно определенной квадратичной формы можно рассматривать как матрицу симметричной билинейной формы. Она удовлетворяет всем пунктам определения скалярного произведения благодаря симметричности и положительности главных миноров. Значит, эта симметричная билинейная форма может быть принята за скалярное произведение. А ее матрица – за матрицу Грама.

Определение. Линейное преобразование φ называется *присоединенным* к билинейной форме b , если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))$.

В матричной записи $X^T B Y = X^T \Gamma \Phi Y$, где B – матрица билинейной формы, Γ – матрица Грама, Φ – матрица присоединенного преобразования. Т.о. $\Phi = \Gamma^{-1} B$.

Если базис ортонормированный, а билинейная форма симметрична, т.е. $B^T = B$, тогда $\Phi^T = (EB)^T = B^T = B = \Phi$, т.е. присоединенное преобразование является самосопряженным.

Теорема 4.

Для каждой квадратичной формы, заданной в ОНБ евклидова пространства, существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.

Доказательство. Каждой квадратичной форме соответствует симметричная билинейная форма, обладающая присоединенным преобразованием. В ОНБ оно самосопряженное, а его матрица совпадает с матрицей заданной квадратичной формы. У самосопряженного преобразования существует ОНБ из собственных векторов, в нем матрица (а, значит, и исходная форма) диагональна. Т.е. достаточно найти собственные числа матрицы квадратичной формы и записать ее в диагональном виде. Базис, в котором она приняла такой вид, составляют собственные векторы ее матрицы. ■

УПРАЖНЕНИЕ

Билинейная функция записана в ОНБ трехмерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид. Найти канонический вид, ранг и сигнатуру квадратичной формы.

$$x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_3.$$

Ответ: матрица перехода от данного базиса к новому:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ канонический вид функции: } x'_1 y'_1 + 3x'_2 y'_2.$$

Теорема 5 (об одновременном приведении пары квадратичных форм к диаг виду).

Если в линейном пространстве задана положительно определенная квадратичная форма k_1 и произвольная форма k_2 , то существует базис, в котором k_1 имеет канонический вид, а k_2 – диагональный.

Доказательство. Введем скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где билинейная форма b_1 соответствует квадратичной k_1 . По отношению к этому скалярному произведению ортонормированным будет тот базис, в котором k_1 имеет канонический вид.

Перейдем к этому базису. Матрица формы k_2 поменяется, но для нее по Теореме 4 можно найти замену базиса, приводящую ее к диагональному виду. При этом ОНБ заменится на ОНБ из собственных векторов присоединенного преобразования к форме k_2 , а вид k_1 не изменится (при замене ОНБ на ОНБ матрица перехода ортогональная, а матрица k_1 была единичная, значит, в новом базисе $K^{-1}_1 = S^T E S = S^{-1} S = E$).

Иначе. K_1 – матрица Грама для вспомогательного скалярного произведения. Преобразование, присоединенное к форме k_2 , имеет матрицу $A = K^{-1}_1 K_2$. Его характеристический многочлен $\det[K^{-1}_1 K_2 - \lambda E] = \det K^{-1}_1 \cdot \det[K_2 - \lambda K_1]$. Поскольку $\det K^{-1}_1 \neq 0$, корни

характеристического многочлена для матрицы A совпадают с корнями уравнения

$$\det[K_2 - \lambda K_1] = 0,$$

которое называется *обобщенным характеристическим уравнением*.

Найдя их, сразу можно записать диагональный вид k_2 . Если требуется базис, надо найти ФСР $(K_2 - \lambda K_1)X = 0$ для каждого λ , ортонормировать полученные векторы, используя скалярное произведение с матрицей Грама K_1 . Тогда в нем k_1 имеет канонический вид, а k_2 – диагональный. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что, по меньшей мере, одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду и записать этот диагональный вид обеих форм. $f = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 5/2 x_2^2$, $g = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

$$\text{Ответ: } x_1 = \sqrt{5}x_1'', \quad x_2 = \frac{-3x_1'' + x_2''}{\sqrt{5}}; \quad f = \frac{29}{2}x_1''^2 - \frac{1}{2}x_2''^2, \quad g = x_1''^2 + x_2''^2.$$

2. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду, а квадратичную форму $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f .

$$\text{Ответ: } 5x_1''^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

№1. Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в двумерном линейном пространстве:

$$\text{а) } x_1y_1; \quad \text{б) } 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2.$$

№2. Восстановить симметричную билинейную форму в трехмерном линейном пространстве по данной квадратичной форме и составить ее матрицу:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2.$$

№3. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду двумя способами: с помощью метода Лагранжа и с помощью элементарных преобразований ее матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;

б) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

№4. Привести к каноническому виду данную билинейную форму $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

№5. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $-9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$ положительно, отрицательно определена или полуопределена?

№6. Квадратичная функция записана в ОНБ трехмерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид. Найти канонический вид, ранг и сигнатуру квадратичной формы.

а) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$; б) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$.

№7. Пусть все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A принадлежат отрезку $[a, b]$. Доказать, что квадратичная форма с матрицей $A - \lambda E$ положительно определена при $\lambda < a$ и отрицательно определена при $\lambda > b$.

№8. Проверить, что, по меньшей мере, одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти

две формы одновременно к диагональному виду и записать этот диагональный вид обеих форм.

$$\text{а) } f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \quad g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2;$$

$$\text{б) } f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$

$$g = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2.$$

№9. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму $g = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2$ к каноническому виду, а квадратичную форму $f = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2$ к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f .

№10*. Привести квадратичную форму $9x_1^2 + 24(i+1)x_1x_2 + 16x_2^2$ к каноническому виду.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$\text{№1. а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1^2; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2. \quad \text{№2. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 + 7x_3y_3.$$

$$\text{№3. а) } x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2; 3, 1, 2, -1; \quad \text{б) } x_1'^2; 1, 1, 0, 1; \quad \text{в) } x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2; 4, 4, 0, 4.$$

$$\text{№4. } x_1'y_1' + x_2'y_2'. \quad \text{№5. Отрицательно определена при } |\lambda| < 1, \text{ неположительно при } \lambda = \pm 1.$$

$$\text{№6. a) } \mathbf{e}'_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T, \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)^T; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

$$x_1'^2 + 2x_2'^2 + 10x_3'^2; 3, 3;$$

$$\text{б) } \mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^T, \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T; \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{3}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2; 2, 2.$$

$$\text{№8. a) } x_1 = \frac{x_1''}{\sqrt{2}} - x_2'', x_2 = \frac{x_1''}{3\sqrt{2}} + \frac{2x_2''}{3}; f = x_1''^2 + x_2''^2, g = 5x_1''^2 - 4x_2''^2;$$

$$\text{б) } x_1 = \frac{x_2''}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{x_1''}{\sqrt{3}} + \frac{x_2''}{\sqrt{2}} - \frac{2x_3''}{\sqrt{6}}, x_3 = \frac{x_1''}{\sqrt{3}} - \frac{x_2''}{\sqrt{2}} + \frac{x_3''}{\sqrt{6}};$$

$$f = 3x_1''^2 + 2x_2''^2, g = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2.$$

$$\text{№9. } x_1''^2 + 4x_2''^2. \text{ №10*. } x_1'^2.$$