Российский государственный университет нефти и газа
имени И.М. Губкина

Профессор

Василий Валерьянович КАЛИНИН

Актовая лекция

на встрече с первокурсниками
1 сентября 2006 года

МАТЕМАТИКА:
УЧИТЬ – НЕ УЧИТЬ?!

Москва 2006

Математика: учить – не учить?

Нужна ли математика современному специалисту нефтегазового комплекса? Нужно ли ее учить глубоко и серьезно студентам инженерных или, скажем, технологических специальностей отраслевых ВУЗ'ов? А если – нужно, то уж, наверное, на экономических или юридических направлениях можно обойтись без математики? Все эти вопросы часто можно прочесть в глазах студентов, только что переступивших порог РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. Действительно, казалось бы, чего проще: учишься на геологическом факультете – учи только геологию, учишься на буровика – занимайся вопросами бурения. Оказывается, всё далеко не так очевидно!

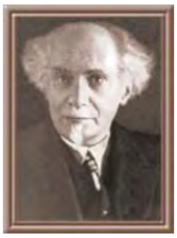
Начнем с простого примера. Оказались вы, скажем, в Японии, местный язык не знаете, и вдруг увидели на школьном заборе надпись:

小僧 + 女の子 = 愛

Тут же вас осенит догадка: "Конечно же, это что-то вроде: "Ваня + Маша = любовь"! Так вы узнаете сразу три важных японских слова. А помогут вам в этом простые математические знаки и элементарная логика. Недаром о математике красиво сказал великий ученый и нобелевский лауреат А. Эйнштейн: "Математика – это поэзия логических идей!" (Кстати, А. Эйнштейн в школе весьма скверно знал математику, однако увлечение физикой поставило его перед необходимостью овладеть всеми математическими премудростями, и без этого вряд ли бы достиг высот в своей науке.)

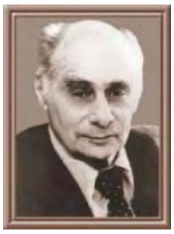
Вообще, многие великие люди высоко ценили и уважали математику, даже если творили в областях достаточно далеких от нее. Начнем с известных слов М.В. Ломоносова: "А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит!". И действительно любой преподаватель ВУЗ'а вспомнит множество случаев, когда студент, пришедший на первый курс с весьма слабыми знаниями и понявший, что ему грозит отчисление, начинал усиленно учить математику, что приводило его в дальнейшем к серьезным успехам не только в этом предмете, но и в других дисциплинах. Вообще математика занимает особое место в образовании специалиста. Физик Н. Бор объяснял это так: "Математика значительно больше, чем наука, поскольку она – язык науки". И, как следствие, успехи в математике обязательно приводят к успехам в других сферах. Еще более красиво сказал Г. Галилей: "Математика – это язык, на котором с людьми разговаривают боги". Ну и завершим цитирование высказыванием мало популярного ныне философа, но, тем не менее, оказавшего значительное влияние на развитие человеческого общества в XX веке, К. Маркса: "Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться математикой".

В нашем университете работали многие крупные ученые, которым на основе широкого использования математических подходов к описанию явлений удалось значительно продвинуть вперед нефтегазовую науку. Это – академики Л.С. Лейбензон (1879 – 1951), П.Я. Кочина (1899 – 1999), С.С. Наметкин (1876 – 1950), Г.Н. Флеров (1913 – 1992), профессора И.А. Чарный (1909 – 1967), В.Н. Щелкачев (1907 – 2005), М.А. Гусейнзаде (1916 – 2006).

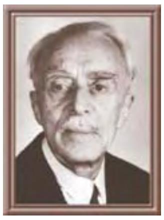

Л.С. Лейбензон


П.Я. Кочина


С.С. Наметкин


Г.Н. Флеров


И.А. Чарный


В.Н. Щелкачев


М.А. Гусейнзаде

Все они много сделали для того, чтобы наша страна занимала достойное место в ряду крупнейших стран мира, занимающихся добычей нефти и газа, и чье влияние на современную мировую экономику несомненно.

Что же может произойти, если в нефтегазовой науке пренебречь математикой, если при эксплуатации скважин и трубопроводов не проводить скрупулезных математических расчетов? Результат может оказаться плачевным. Мало того, что значительная часть сырья окажется под землей, но и добытое не удастся доставить потребителям. На рисунке изображен разрыв трубы под действием статических нагрузок и внутреннего давления. Для того чтобы избежать такой аварии, необходимо было проанализировать дифференциальное уравнение изгиба трубопровода:

$$\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{S_x}{EJ}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{c_{yo}D_н}{EJ}w=\frac{q_y}{EJ}$$

Разрыв трубопровода из-за действия статических нагрузок
и внутреннего давления.

А в следующем примере действие нагрузок привело не только к разрыву трубы, но и к экологической катастрофе, из-за возгорания углеводородного сырья. Здесь уже математика должна помочь не только эксплуатационникам, но и специалистам в области промышленной экологии, ведь провести анализ последствий катастрофы и выдать рекомендации по их ликвидации тоже невозможно без точных расчетов.

Экологические последствия разрыва трубопровода.

Разрыв трубопровода может произойти не только из-за статических нагрузок. Давно было замечено, что в водопроводной трубе при внезапном перекрытии краном потока жидкости может возникнуть деформация или даже разрыв. Все дело в так называемом гидравлическом ударе, возникающем из-за скачкообразного изменения внутреннего давления жидкости и со скоростью звука распространяющемся по трубе. В 1899 г. великий русский ученый Н.Е. Жуковский опубликовал в Бюллетенях Политехнического общества статью "О гидравлическом ударе в водопроводных трубах", в которой он впервые с помощью математики объяснил это явление. Тогда еще транспортировкой углеводородов по трубам не занимались, но позже с этой проблемой столкнулись нефтяники, и им пришлось всерьез принимать ее во внимание.

В самое последнее время к чисто технологическим проблемам транспорта углеводородов добавились и экономические. Рост цен спровоцировал несанкционированные врезки в трубопроводы. Определить место, где произведена такая врезка, представляет нелегкую задача. Математика помогла и здесь. Профессором РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина М.А. Гусейнзаде были получены уравнения, позволяющие установить место врезки:

$$\Delta Q = Q\big|_{x=0} - Q\big|_{x=l} = \frac{G_1}{F},$$

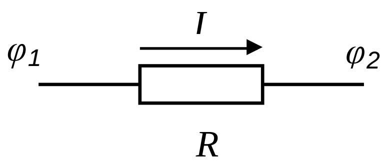
$$x_1 = \frac{Fl}{G_1}\left(Q_o - Q\big|_{x=l}\right)$$

Разрыв нефтепровода вследствие гидравлического удара.

Несанкционированная врезка в нефтепровод.

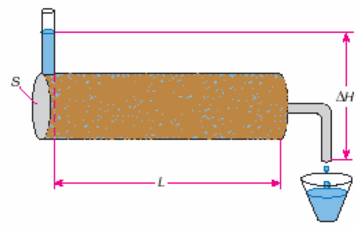
Приведя выше примеры использования математики в нефтегазовой отрасли, мы, на самом деле, были немного не точны. В основе всех математических соотношений все-таки лежат физические законы, которые лишь выражаются языком математики. Вспомним некоторые из них.

1. **Закон Ома** выражает зависимость между электрическим током напряжением и сопротивлением на линейном участке электрической цепи:



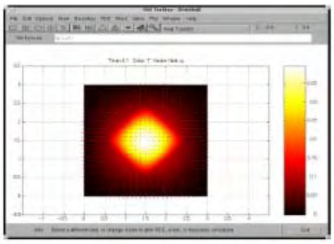
$$I = \frac{\Delta\varphi}{R}$$

2. **Закон Дарси** дает зависимость скорости фильтрации жидкости в пористой среде от приложенного перепада давления:



$$v = \frac{k}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

3. **Закон теплопроводности** определяет тепловой поток как функцию перепада температур:



Visualization of the Temperature and the Heat Flux

$$\frac{Q}{St} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Эти законы (как и многие другие), несмотря на различие между стоящими за ними физическими процессами, имеют универсальный характер, а именно, выражаются одной и той же математической зависимостью:

$$\vec{A} = -k \cdot grad(B),$$

где некоторая векторная величина $\vec{A}$ линейно зависит от *градиента* скалярной величины *B*. (Градиент – это скорость изменения величины по соответствующим пространственным координатам).

Движение углеводорода в пласте в процессе извлечения нефти тоже нельзя описать без понимания физических законов. Простейшей моделью для описания такого движения является движение вязкой капли в тонком капилляре, заполненном водной средой. При наложении градиента давления капля, как впрочем, и окружающая ее жидкость, начинает перемещаться. Математические расчеты позволили установить зависимость скорости движения от физико-химических, гидродинамических и геометрических характеристик системы:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{a}\left[4\mathrm{Ca}\frac{L + (\bar{\mu} - 1)\ell}{a} + 2,21 \cdot (3\mathrm{Ca})^{2/3}\right], \qquad \mathrm{Ca} = \frac{\mu_1 U}{\sigma}$$

Здесь

$\Delta p = P^- - P^+$ – перепад давления на концах капилляра;

U – скорость движения капли;

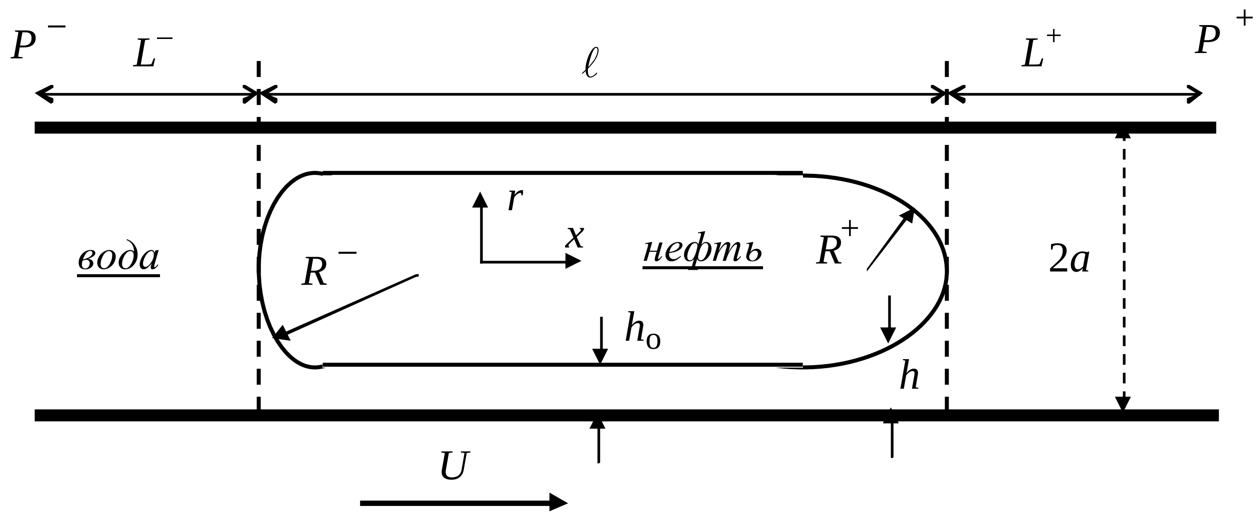
μ_1, μ_2 – вязкость воды и нефти, соответственно, $\bar{\mu} = \mu_2 / \mu_1$;

σ – поверхностное натяжение;

a – радиус капилляра;

L, ℓ – длины капилляра и капли, соответственно;

Первое слагаемое в квадратных скобках описывает обычное движение жидкости по цилиндрическому капилляру (в гидродинамике оно называется течением Пуазейля), а второе слагаемое обусловлено поверхностными эффектами. Численные оценки показывают, что при медленных движениях капли, характерных для процессов извлечения углеводородов, роль поверхностных эффектов оказывается весьма значительной, и пренебрегать ею, как это было принято в ранних классических исследованиях, нельзя.

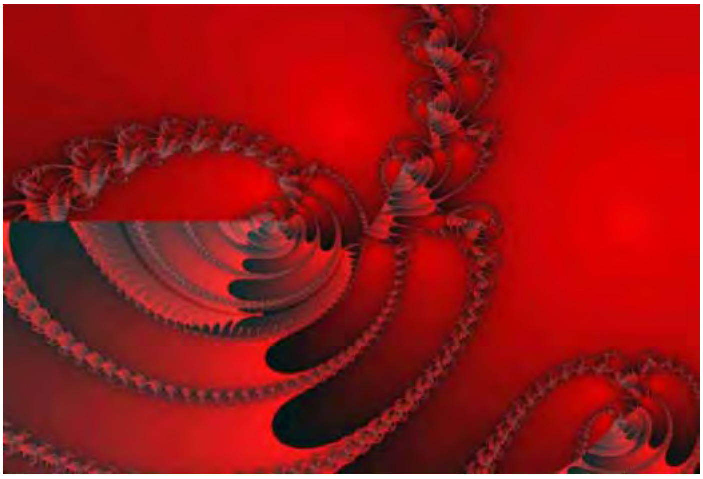


Движение капли нефти по тонкому капилляру.

Математика – великая и сложная наука, с ее помощью можно решить множество разнообразных проблем, поставленных нам окружающей действительностью. Вспомним еще раз фразу: "Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться математикой". И, действительно, без этой науки вряд ли человечество продвинулось бы так далеко в познании законов, по которым устроена природа. Вместе с тем математика (и математики) часто занимаются весьма абстрактными задачами, зачастую не имеющими никаких практических применений. Нередко и из таких занятий возникает что-то полезное. Не чуждо природе математики и чувство прекрасного. Приведем здесь один пример, возникший из рутинного студенческого исследования одного уравнения, не имеющего под собой никакой практической основы:

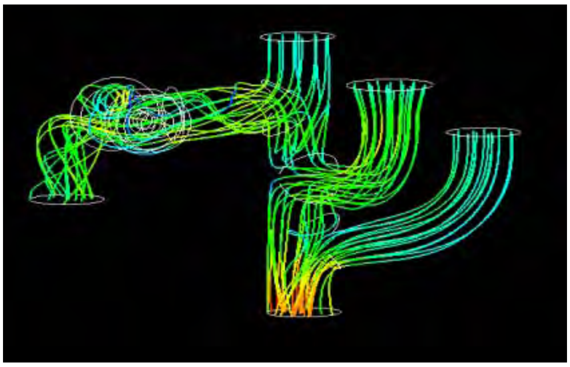
$$z^{1+i}+1=0.$$

Численное решение этого уравнения в области комплексных чисел привело к возникновению замечательного рисунка:



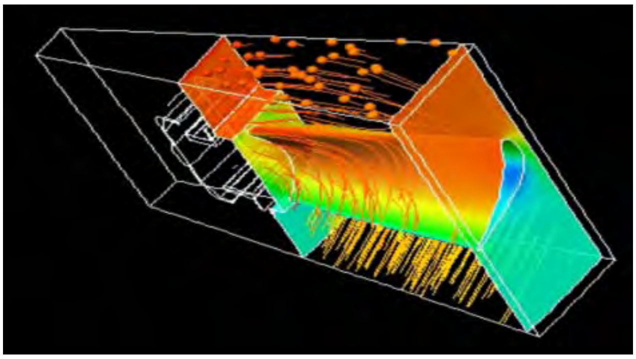
Подобного рода объекты в математике называют фракталами. Возникшие в конце XX века из чисто абстрактной теории, сейчас эти объекты широко распространены во многих практических приложениях, в том числе и в нефтегазовых исследованиях.

Говоря о современном состоянии математики, конечно, нельзя не учитывать изменений, обусловленных развитием вычислительной техники. Многие задачи, требовавшие раньше огромных затрат времени, или вообще не поддающиеся решению из-за их сложности, в наше время легко могут быть выполнены на компьютере за считанные минуты, или даже секунды. Приведем результаты численного расчета силовых нагрузок на поверхности трубопровода (вспомним, к каким последствиям приводит его разрушение).



Силовые нагрузки на поверхности трубопроводов.

Следующий пример демонстрирует расчет давления на турбине компрессорной станции.



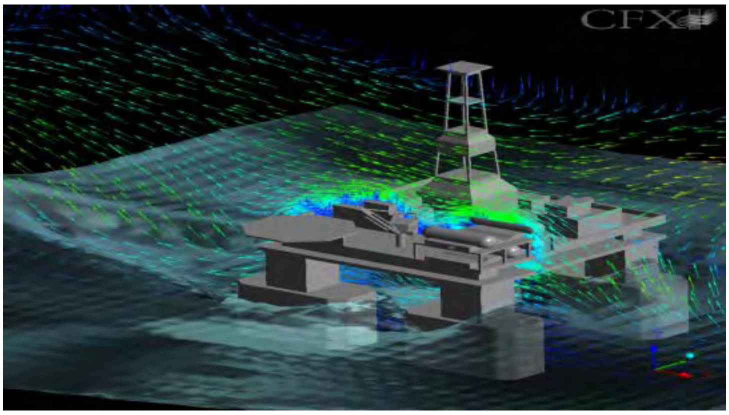
Давление на турбине компрессорной станции

Для этого расчета пришлось решать уравнение

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u_i u_k - \tau_{ik}\right) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = S_i$$

на сложной искривленной поверхности. Здесь никакая математика без помощи компьютера обойтись не может.

Последний пример такого рода описывает численный расчет давления на морскую нефтяную платформу. И здесь математики ограничились только записью соответствующих уравнений (и граничных условий), а остальную работу доверили компьютеру.



Расчет давления на морскую платформу.

Конечно же, современное состояние вычислительной техники не могло не сказаться и на методах преподавания математики в высших учебных заведениях. Ведь не секрет, что часто ВУЗ'ы упрекали в том, что они выпускают специалистов, далеких от реалий, в которых тем приходится работать. Предприятия вынуждены тратить время и деньги на переподготовку молодого сотрудника, только что покинувшего стены института. Такое положение не устраивало ни одну из сторон.

Конечно же, ни у кого нет сомнений в необходимости и незыблемости традиционного классического образования. Однако не учитывать возможности, которые предоставляет компьютер, не научить студента пользоваться этими возможностями в проводимых теоретических расчетах, в наше время просто недопустимо.

Известно множество программ, которые позволяют проводить математические исследования не только в численном виде (это можно было делать еще сотню лет назад на арифмометрах – только долго!), а в символьной, аналитической форме. Один из лучших образцов такого рода – система "*Mathematica*", созданная С. Вольфрамом лет пятнадцать назад. Удивительно, как эта программа, умещавшаяся вначале на двух дискетах, могла выполнять вычисления, потребовавшие бы у квалифицированного специалиста-математика часы и дни кропотливого труда. И математик при этом наверняка бы где-нибудь ошибся в арифметических подсчетах.

Какие же возможности предоставляют компьютерные подходы в математике? Начнем с простого примера из школьного курса, связанного с решением систем линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Любой школьник быстро найдет решение: $\{x = 3,\ y = 7\}$. Однако таких примеров в жизни, как правило, не возникает. Скажем, решить систему

$$\begin{cases} 123456789x + 987654321y = 987654330 \\ 135792468x + 975318642y = 864297540 \end{cases}$$

так легко уже не удастся. И калькулятор не поможет – он просто не справится с умножением чисел, имеющих такое количество значащих цифр. А вот система "*Mathematica*" справляется за секунды. Достаточно ввести исходные числовые значения:

$$A = \begin{pmatrix} 123456789 & 987654321 \\ 135792468 & 975318642 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 987654330 \\ 864297540 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

и выполнить команду

`Solve[A.v == d, {x, y}]`.

Тут же компьютер даст ответ:

```
Out[2]:= {{x→-8, y→2}}
```

(Кто бы мог подумать, что такая громоздкая система уравнений имеет такое простое решение!)

Следующая задача еще более сложная. Известно, что свободные колебания стержней или струн описываются так называемым *волновым уравнением*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Здесь $u(x,t)$ – отклонение струны от положения равновесия как функция времени t и координаты x).

К волновому уравнению должны быть добавлены граничные и начальные условия. Если постоянная a = 1, длина струна равна 2, а ее концы закреплены (вспомним, например, струны на гитаре), то граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

Будем считать, что в начальный момент струна отклонена от равновесного положения так, что

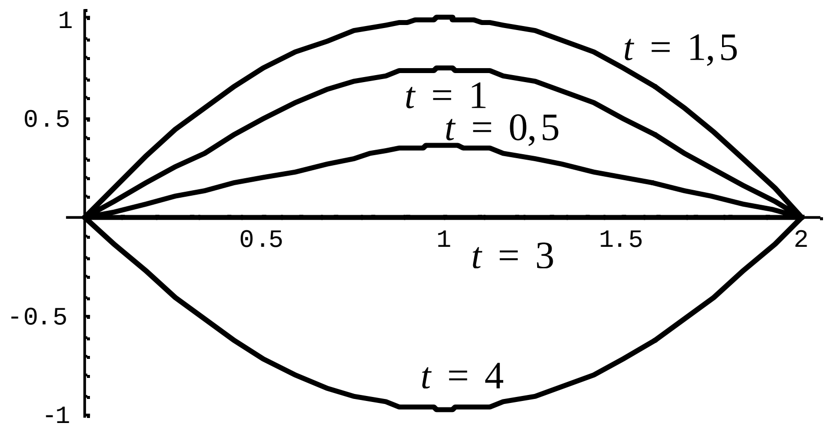
$$u(x,0) = x(2-x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Математики (и студенты старших курсов) легко могут решить такую задачу и получить ответ в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\left(\cos \pi n - 1\right)\cos\dfrac{\pi n t}{2}\sin\dfrac{\pi n x}{2}}{\pi^3 n^3}.$$

Однако наглядно представить этот результат практически невозможно. Ведь для этого надо изобразить сумму ряда с бесконечным числом членов, зависящих от двух переменных: x и t. Невозможно даже изобразить сумму нескольких членов такого ряда. Так что математикам (и инженерам) оставалось только любоваться красотой полученного решения, не имея возможности провести его детальный анализ.

Система "*Mathematica*" может не только решить задачу, но и изобразить форму струны либо в заданный момент времени, либо в виде анимации, охватывающей произвольный интервал времени. Не имея возможность показать в рукописном варианте лекции анимированную картину, ограничимся графическим изображением формы струны.



Форма струны в различные моменты времени *t*.

Еще более интересная задача связана с колебаниями прямоугольной мембраны. Такие колебания описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

Если мембрана натянута на прямоугольную область $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 1$ и закреплена по своему периметру:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=4} = 0,$$
$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,$$

а в начальном состоянии ее отклонение от положения равновесия задается условиями:

$$u\big|_{t=0} = xy(1-y)(4-x),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

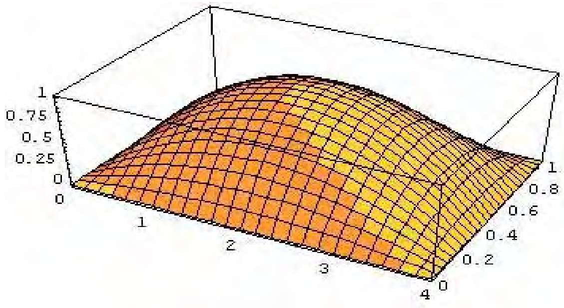
то решение такой задачи записывается в виде двойного ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(kt) \sin\frac{\pi m t}{4} \sin(\pi n y),$$

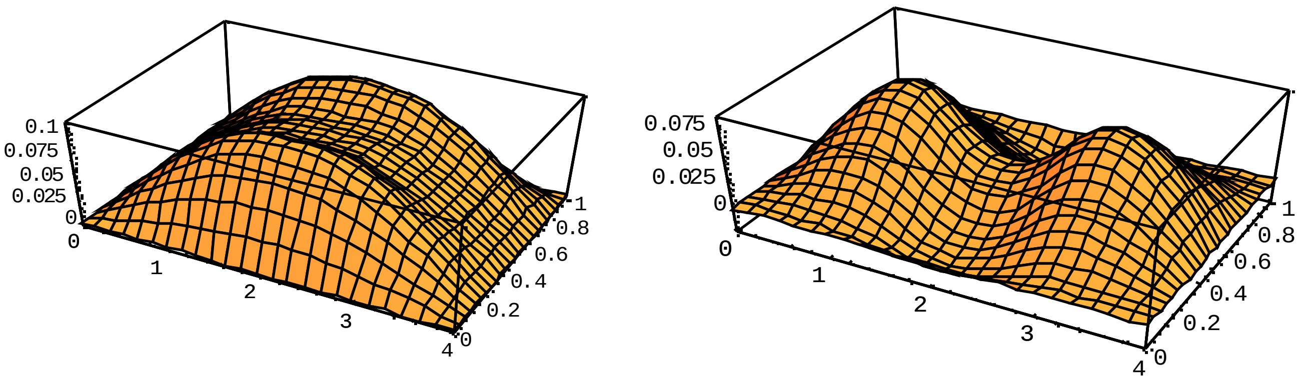
где

$$k = \pi\sqrt{\frac{m^2}{16} + n^2}, \qquad A_{mn} = \int_0^4 x(4-x)\sin\frac{\pi m x}{4}\,dx \cdot \int_0^1 y(1-y)\sin \pi n y\,dx.$$

Анализ полученного решения представляет собой сложнейшую задачу, далеко выходящую за рамки известных стандартных подходов. Компьютерное исследование позволило установить не известные ранее закономерности в поведении мембраны. В частности, как это видно из рисунков, в некоторые моменты времени на мембране возникают деформации, имеющие вид двух локальных экстремумов. Эти экстремумы могут располагаться как вдоль оси мембраны, так и симметрично относительно ее. (При расчете подобных конструкций на прочность именно в областях вблизи экстремумов, прежде всего, могут возникать разрушения).



Начальное состояние прямоугольной мембраны.



Прямоугольная мембрана в моменты времени $t = 1.5$ и $t = 5.35$.

Как показывают приведенные примеры, современному специалисту уже не достаточно знаний лишь фундаментальных основ естественных наук (математики, физики, механики, химии, …). Без овладения навыками работы на компьютере, без использования специализированных компьютерных программ, в наше время просто невозможно провести необходимые инженерные расчеты, соответствующие современным требованиям.

Конечно, не нужно впадать в другую крайность. Некоторые студенты так увлекаются компьютером, что начинают пренебрежительно относиться к фундаментальным наукам: "Зачем учить математику, если все необходимые расчеты можно сделать на компьютере?". Совершенно ошибочная точка зрения! Все равно, базовые знания должны быть приобретены тяжелым повседневным трудом, посещением лекций и практических занятий, самостоятельной работой. А без этого никакой компьютер не поможет!

А теперь давайте посмотрим вперед на несколько ближайших лет, которые вы, первокурсники, проведете в стенах нашего замечательного учебного заведения – Российского Государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. Сейчас вы находитесь в самом начале сложного пути, пути, на котором вас научат основам фундаментальных и специальных наук, основам инженерных знаний. Сейчас этот путь вам кажется длинным и радостным, и вы со счастливым настроением мечтаете о том дне, когда вы, наконец, будете удостоены высокого звания специалиста, бакалавра или магистра. Но для того, чтобы ваши мечты обрели реальность, нужно усердно учиться, овладевать многими и многими дисциплинами, сдать огромное количество зачетов и экзаменов, курсовых работ и, наконец, защитить дипломную работу.

И только тогда вы будете вспоминать годы учебы как самые счастливые годы своей жизни, а не как годы мучений и праздности! А лучшим из вас через пять лет в торжественной обстановке на сцене дворца культуры руководство университета вручит дипломы и заработанные вами награды.

И это счастье с вами разделят ваши родители, которые все эти годы будут переживать за вас, волноваться во время сессии, радоваться за успешно сданные экзамены, расстраиваться из-за ваших "хвостов"! Ведь годы учебы – это годы взросления и становления, годы, в течение которых детство постепенно и незаметно переходит в молодость. И именно поэтому эти годы любой выпускник помнит всю свою жизнь!

Ну а после окончания нашего университета вам будут подвластны любые вершины, ведь любая компания (российская или иностранная) с удовольствием берет на работу выпускников РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, зная, что уровень их знаний и подготовки соответствует самым высоким современным стандартам, зная, что выпускник-губкинец в любой ситуации покажет себя с самой лучшей стороны, справится с любой порученной ему задачей!

Успехов вам!