Корни многочлена

Б. М. Писаревский (Москва)

Если в задаче требуется найти корни многочлена второй степени, т. е. решить квадратное уравнение, то с помощью известной формулы мы делаем это спокойно и уверенно. Никакой уверенности в разрешимости аналогичной задачи для многочлена третьей степени нет. Если повезет, то один из корней уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ угадаем, а затем его левую часть разложим на множители. Если не угадаем, а левая часть сразу на множители не раскладывается, то корней, скорее всего, не найдем. Использовать известную формулу Кардано для нахождения вещественных корней уравнения удается только в исключительных, а точнее – специально подобранных случаях. Рассмотрим, например, уравнение $x^3-3x^2-16x+48=0$. В левой части его члены легко группируются $(x-3)(x^2-16)=0$, поэтому $x_1=3,\ x_{2,3}=\pm 4$. Между тем, строгое следование этой формуле приводит к следующему результату:

$$x=1+\sqrt[3]{-15+\frac{28\sqrt{3}}{9}i}+\sqrt[3]{-15-\frac{28\sqrt{3}}{9}i},$$

где i – мнимая единица. Увидеть в этой записи приведенные выше корни весьма проблематично.

Задачи, в которых приходится сначала угадать целый корень кубического уравнения, а затем найти остальные корни, достаточно часто встречаются в практике школ с расширенной программой по математике и на вступительных экзаменах в высшей школе (например, задача 15 в [1]).

Если в задаче речь идет только о числе корней кубического уравнения, то ответ на этот вопрос легко получается графически. От данного уравнения перейдем к равносильной системе $\begin{cases} y=-ax^3-bx^2-cx \\ y=d \end{cases}$. Теперь достаточно построить график функции $y=-ax^3-bx^2-cx$ и выяснить, сколько он имеет точек пересечения с горизонтальной прямой $y=d$. Построить этот график несложно, так как производная данной функции – квадратный трехчлен.

Покажем, как этот метод используется для решения конкретных задач. Все рассмотренные ниже задачи составлены автором и предлагались в последние годы на вступительных экзаменах в Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина. Поскольку на экзаменах используется первоначальная компьютерная проверка, условия и числовые данные подобраны так, чтобы каждая задача имела единственный точный десятичный ответ. В первых двух задачах речь идет о числе точек пересечения двух известных из школьной программы графиков.

1. Найдите наименьшее целое положительное значение параметра a, при котором графики функций $y=2x^2-10$ и $y=\dfrac{a}{x}$ пересекаются в одной точке.

Решение. Нас интересует число корней уравнения $2x^2-10=\dfrac{a}{x}$, иначе – число отличных от нуля корней кубического уравнения $2x^3-10x=a$. Рассмотрим функцию $f(x)=2x^3-10x$ и построим ее график. Это нечетная функция, на положительной полуоси она обращается в ноль при $x=0$ и $x=\sqrt{5}$. Поскольку $f'(x)=6\left(x^2-\dfrac{5}{3}\right)$, то при $x\in\left(0;\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$ функция убывает, а при $x\in\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}};+\infty\right)$ – возрастает. При $x=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ она достигает локального минимума, равного $\left(-\dfrac{20}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\approx-8{,}6$. С учетом нечетности функции получается график, приведенный на рис. 1. При положительном значении параметра a прямая $y=a$ может пересекать этот график в трех, двух или одной точке.

Нас интересует последний случай, он имеет место при $a > \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$ и наименьшее целое значение a, удовлетворяющее этому условию, есть $a = 9$.

Ответ 9.

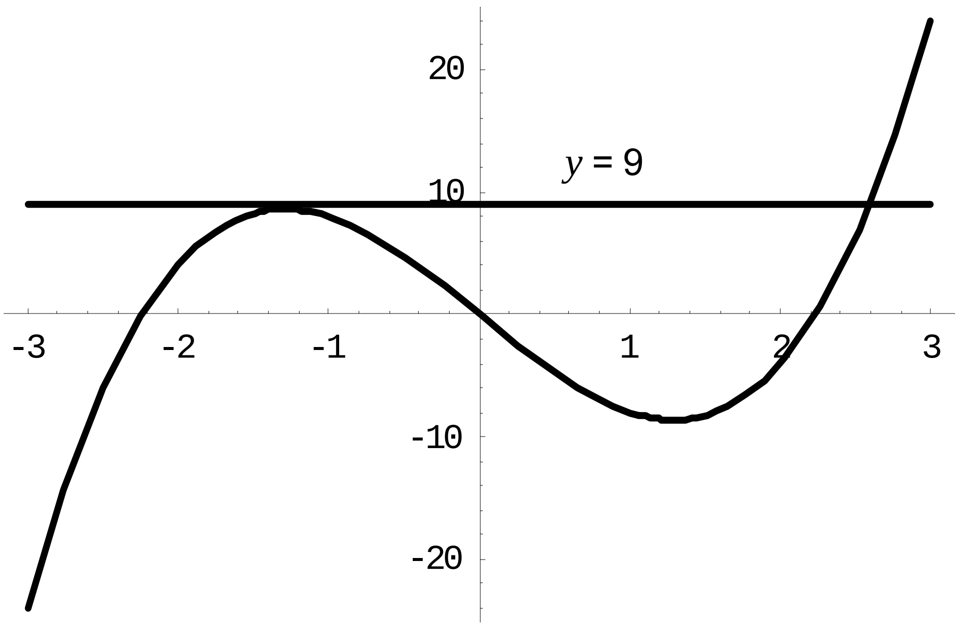


Рис. 1

2. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором графики функций $y = x^2 + 3x - 45$ и $y = \frac{a}{x}$ имеют две общие точки.

Решение. Как и в предыдущей задаче, надо при $x \neq 0$ построить график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$ и определить возможное число пересечений этого графика с горизонтальной прямой $y = a$. Нули функции есть $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = 1{,}5\left(-1 \pm \sqrt{21}\right)$, так что $x_2 \approx -8{,}4$, $x_3 \approx 5{,}5$. Далее $f'(x) = 3(x+5)(x-3)$ и при $x \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (-5; 3)$ – убывает. В точке $x = -5$ она достигает локального максимума, при этом $f(-3) = 175$. В точке $x = 3$ реализуется локальный минимум и $f(3) = -81$. В итоге график функции имеет вид, изображенный на рис. 2. Точек пересечения с горизонтальной прямой $y = a$ здесь также может быть три, две или одна. Две точки получаются только в двух случаях, когда прямая проходит через точки на графике, в которых реализуется экстремум. Большее из двух значений есть $a = 175$.

Ответ 175.

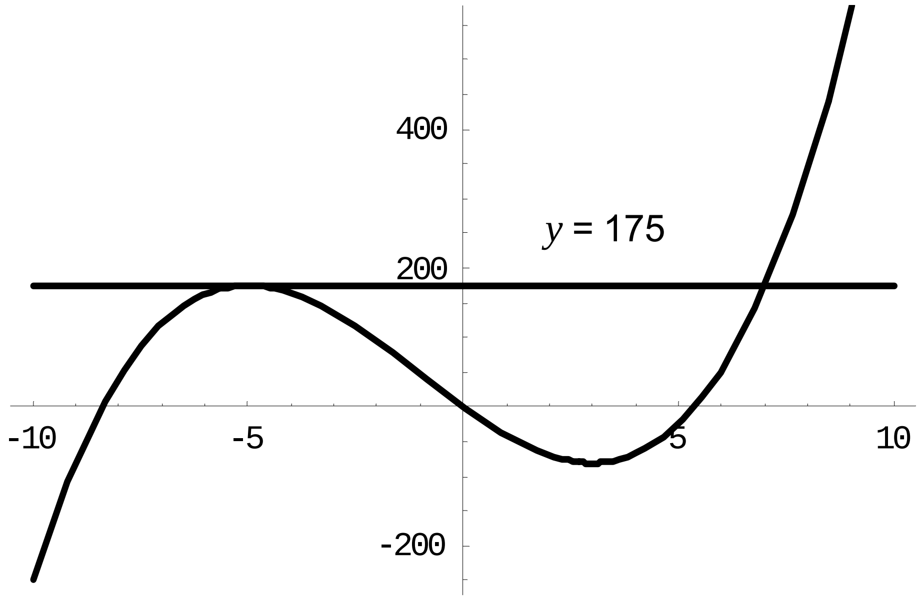


Рис. 2

В последующих задачах число корней кубического уравнения – это число существующих решений в задаче о проведении касательной к графику функции.

3. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором через начало координат проходят три различные прямые, касающиеся графика функции $y = x^3 + 9{,}6x^2 + 41x + a$.

Решение. Пусть к графику проведена касательная в точке M с абсциссой x_0. Уравнение этой касательной запишется в виде:

$$y = x_0^3 + 9{,}6x_0^2 + 41x_0 + a + \left(3x_0^2 + 19{,}2x_0 + 41\right)\left(x - x_0\right)$$

и так как эта прямая должна проходить через начало координат $O(0;0)$, то должно выполняться равенство $2x_0^3 + 9{,}6x_0^2 = a$. Для того, чтобы существовало три различных касательных, это кубическое уравнение должно иметь три различных корня. Как и выше, рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 + 9,6x^2$ и построим ее график. Начнем с того, что $f(x) = 2x^2(x + 4,8)$, так что ось Ox график пересекает в точках с абсциссами $x_1 = -4,8$ и $x_2 = 0$. Далее $f'(x) = 6x(x + 3,2)$ и при $x \in (-\infty; -3,2) \cup (0; +\infty)$ данная функция возрастает, а при $x \in (-3,2; 0)$ - убывает. При $x = -3,2$ реализуется локальный максимум, при этом $f(-3,2) = 32,768$. При $x = 0$ имеем локальный минимум и $f(0) = 0$. По этим данным график построен на рис. 3. Точек пересечения с горизонтальной прямой $y = a$ здесь также может быть три, две или одна. Три точки получаются, когда $a \in (0; 32,768)$, и наибольшее целое число из этого промежутка есть $a = 32$.

Ответ 32.

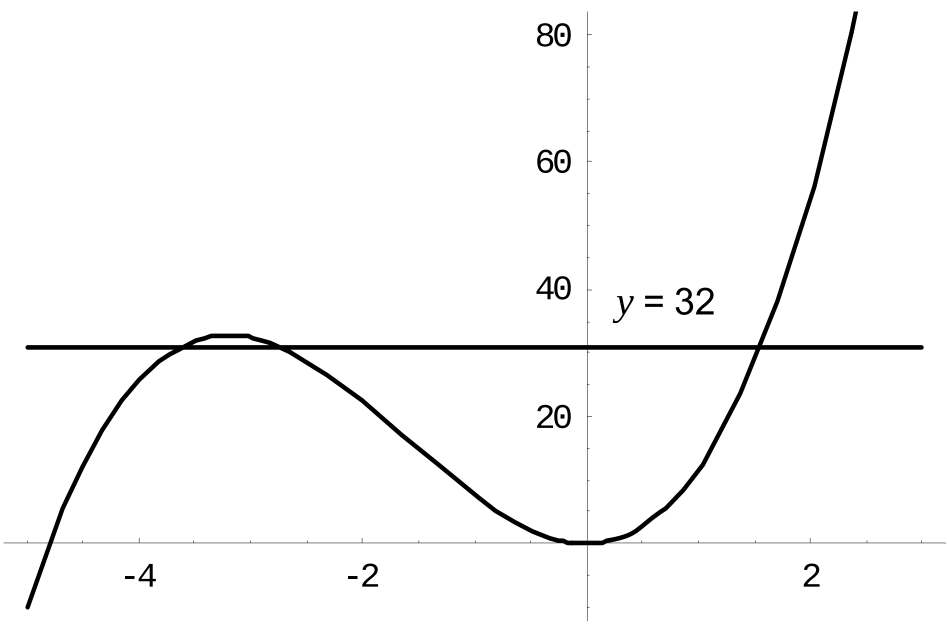


Рис. 3

Отметим, что вопрос о числе касательных, которые можно провести из различных точек плоскости к квадратичной или кубической параболе, рассмотрен в [2].

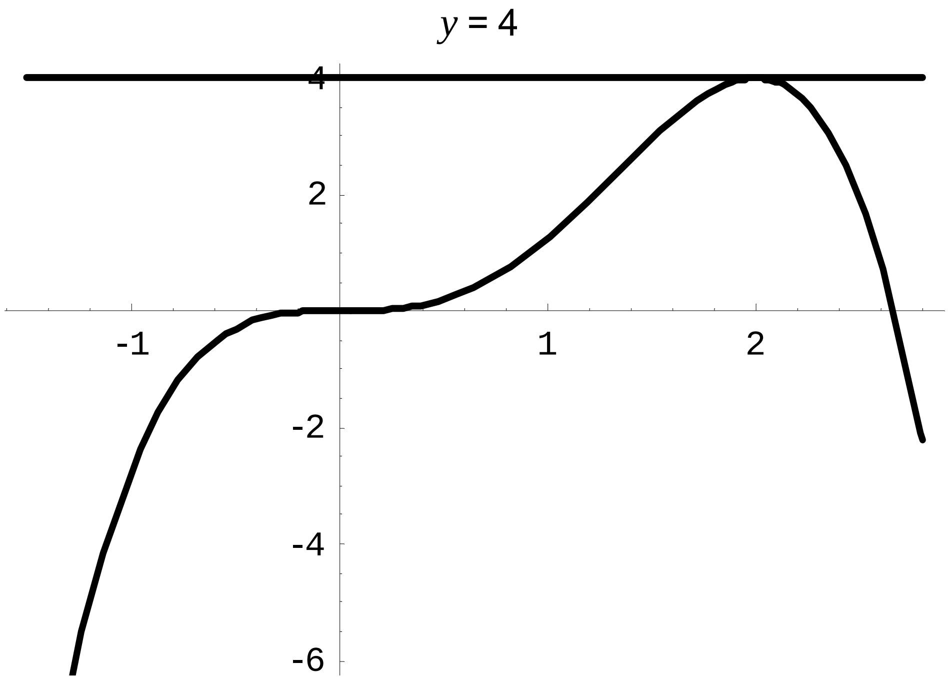
3. При каком значении параметра a существует единственная прямая, касающаяся графика функции $y = x^3 + a$ и графика функции $y = 3x^2$?

Решение. Если x_0 – абсцисса точки касания прямой и графика функции $y = x^3 + a$, то уравнение касательной запишется так:

$$y = x_0^3 + a + 3x_0^2\left(x - x_0\right) = 3x_0^2 x + a - 2x_0^3.$$

Эта невертикальная прямая будет касаться параболы $y = 3x^2$, если она имеет с параболой одну общую точку. Поэтому уравнение $3x^2 = 3x_0^2 x + a - 2x_0^3$ или $3x^2 - 3x_0^2 x + \left(2x_0^3 - a\right) = 0$ должно иметь единственный корень. Это значит, что дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, т. е. $3x_0^4 - 8x_0^3 + 4a = 0$ и нас интересует, при каком значении параметра это уравнение относительно x_0 имеет единственный корень. Уравнение имеет четвертую степень, но поскольку оно неполное, то метод остается прежним. Переписав уравнение в виде $a = 2x_0^3 - 0,75x_0^4$, рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 - 0,75x^4$. Эта функция обращается в ноль при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 8/3$. Поскольку $f'(x) = 3x^2(2 - x)$ и при $x = 0$ производная знака не меняет, то единственная точка экстремума – максимум в точке $x = 2$ и при этом $f(2) = 4$. В итоге график имеет вид, приведенный на рис. 4. Горизонтальная прямая $y = a$ пересекает его в одной точке только при $a = 4$.

Ответ 4.



Задача решена, но продолжим анализ. Мы выяснили, что $a = 4$, так что рассматриваемая пара функций есть $y_1 = x^3 + 4$ и $y_2 = 3x^2$. При $x_0 = 2$ имеем: $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 12$ и $y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 12$. Это значит, что в точке с абсциссой $x_0 = 2$ графики имеют общую точку, а в этой точке – общую касательную. Получается, что единственная общая касательная может быть только в таком случае.

Литература

1. Писаревский Б. М. Задачи о касательной. Математика в школе, 2004, №4, 68 – 71.
2. Писаревский Б. М. Прямые и параболы. Квант, 2003, №4, 48 – 52.