Задачи по планиметрии

Б. М. Писаревский (Москва)

Изучение курса планиметрии заканчивается в 9-ом классе. В это время школьники владеют только начальными понятиями тригонометрии и оказываются не готовыми к решению достаточно сложных планиметрических задач, в которых активно используются формулы тригонометрии. К тому же за время учебы в 10-ом и 11-ом классах они, в значительной мере, теряют навык решения задач по планиметрии. Между тем, такие задачи включаются в билеты вступительных экзаменов в высшие учебные заведения и обычно представляют для абитуриентов наиболее сложную часть экзаменационного задания. Характер этих задач определяется личными пристрастиями соответствующих предметных комиссий. В Российском государственном университете нефти и газа им. И. М. Губкина приняты следующие требования:

- условия задач должны быть достаточно краткими, а чертежи – достаточно простыми;
- в решении задач должна быть содержательная «геометрическая» часть, т. е. построения и обоснования, основанные на определениях и теоремах из курса;
- в решении задач должна быть «алгебраическая» часть, т. е. выполнение тригонометрических преобразований, решение алгебраических или тригонометрических уравнений.

Все рассмотренные ниже задачи составлены автором и предлагались в последние годы на вступительных экзаменах. Поскольку на экзаменах используется первоначальная компьютерная проверка, условия и числовые данные подобраны так, чтобы каждая задача имела единственный точный десятичный ответ.

В приведенных ниже задачах 1 – 4 приходится выполнять различные тригонометрические преобразования.

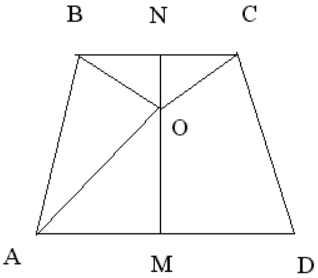

Рис. 1

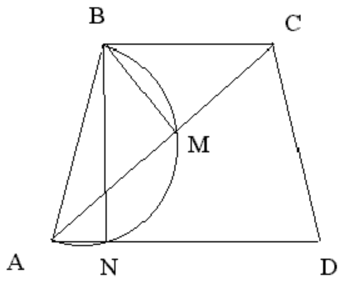

Рис. 2

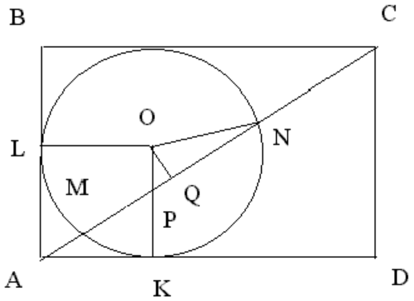

Рис. 3

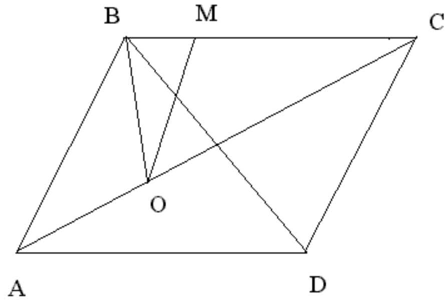

Рис. 4

1. $ABCD$ – равнобедренная трапеция с большим основанием AD, в которой $\cos\angle BAD = 0{,}44$. Окружность радиуса 28 касается стороны AD, стороны AB в точке B и стороны CD в точке C. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Решение. Пусть $\angle BAD = \alpha, \cos\alpha = 0{,}44$, O – центр окружности радиуса $r = 28$ (рис. 1). Так как окружность касается AD и AB то AO – биссектриса $\angle BAD$, т. е. $\angle OAD = \alpha/2$. Через точку O проведем высоту трапеции MN. Поскольку $OB = OC = OM = r$, то $BN = NC$ и потому $AM = MD$, пусть каждый из этих отрезков равен a. Тогда $r = a\,\mathrm{tg}(\alpha/2) = a\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Из точки A к окружности проведены касательные AB и AM, так что $AB = a$ и из треугольника ABD по теореме косинусов $BD = a\sqrt{5-4\cos\alpha}$. Окружность, описанная около $ABCD$, описана и около ABD, поэтому ее радиус есть $R = \dfrac{BD}{2\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{5-4\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. Неизвестную длину a исключаем, составив отношение радиусов $R = r\dfrac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{2(1-\cos\alpha)}$. При $r = 28, \cos\alpha = 0,44$ отсюда $R = 45$. **Ответ** 45.

2. $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, в которую можно вписать окружность. Окружность, построенная на стороне AB как на диаметре, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину AM, если $MC = 20, \cos\angle BAD = 0,2$.

Решение. Пусть N – точка пересечения окружности с основанием AD (рис. 2). Каждый из углов AMB, ANB – прямой, поэтому BN – высота трапеции. Пусть $AB = CD = l, \angle BAD = \alpha$. Тогда $AN = l\cos\alpha$ и из условия $AD + BC = 2l$ вытекает, что $BC = l(1-\cos\alpha)$. Теперь из треугольника ABC по теореме косинусов $AC^2 = l^2(2-\cos^2\alpha)$. Нас интересует сейчас $\cos\angle BAC$, его можно найти как с помощью теоремы синусов, так и теоремы косинусов. В любом случае $AM = l\cos\angle BAC = l\dfrac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sqrt{2-\cos^2\alpha}}$ и $MC = AC - AM = l\dfrac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2-\cos^2\alpha}}$. Поэтому $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ и при $MC = 20, \cos\alpha = 0,2$ отсюда $AM = 29$. **Ответ** 29.

3. $ABCD$ – прямоугольник площади 50 с большей стороной AD. Окружность касается сторон AB, BC, AD и пересекает диагональ AC в точках M и N, причем $MN = 7$. Найдите $\sin\angle CAD$.

Решение. Пусть $\angle BAD = \alpha$ (рис. 3), O – центр окружности, $r = OL = OK$ – ее радиусы, проведенные в точки касания, $OQ \perp AC$. Если $l = MN = 7$, то $MQ = QN = l/2$, далее $AK = r, PK = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $OP = r(1-\mathrm{tg}\,\alpha)$. В треугольнике OPQ угол OPQ равен $\left(90^\circ - \alpha\right)$, откуда $OQ = OP\cos\alpha = r(\cos\alpha - \sin\alpha)$. Теперь из треугольника OQN получаем, что $(l/2) = \sqrt{r^2 - OQ^2}$ и $l = 2r\sqrt{\sin 2\alpha}$. Введем теперь обозначения $AD = a, CD = b$. Тогда площадь прямоугольника есть $S = ab$, а его диагональ $d = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее $\operatorname{tg}\alpha = b/a$, $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2S}{d^2}$ и $r = \frac{b}{2}$. Поэтому $l = 2\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2S}{d^2}}$ или $l = \frac{b}{d}\sqrt{2S}$ и окончательно $l = \sqrt{2S}\sin\alpha$. При $S = 50, l = 7$ отсюда $\sin\alpha = 0{,}7$. **Ответ** 0,7.

4. В ромбе $ABCD$ с острым углом BAD через вершины A, B и D проведена окружность. Она пересекает сторону BC в точке M, такой что $BM : MC = 3 : 2$. Найдите $\cos\angle BAD$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный ромб (рис. 4), его сторона $AB = a$, его острый угол $BAD = \alpha$. Поскольку окружность описана около остроугольного треугольника ABD, ее центр лежит внутри него на серединном перпендикуляре к стороне BD, т. е. в точке O. В этом случае $OA = OB = OM = R$ – радиусу окружности. В равнобедренном треугольнике AOB каждый из углов OAB и OBA равен $\alpha/2$. Отсюда вытекает, что, во-первых, $a = 2R\cos(\alpha/2)$ и, во-вторых, $\angle OBM = \angle OMB = \left(180^\circ - \alpha\right) - \alpha/2 = 180^\circ - 3\alpha/2$. В равнобедренном треугольнике BOM теперь легко находим основание: $BM = 2OB\cos\angle OBM = 2R\cos\left(180^\circ - 3\alpha/2\right) = -2R\cos(3\alpha/2)$. Заметим, что в этом месте формула «подумала» за нас: если $\alpha < 60^\circ$, то окружность стороны BC не пересекает. Далее $MC = a - BM = 2R\left[\cos(\alpha/2) + \cos(3\alpha/2)\right]$ и $BM : MC = \left[-\cos(3\alpha/2)\right] : \left[\cos(\alpha/2) + \cos(3\alpha/2)\right]$. По известной или легко выводимой формуле тройного аргумента $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ отсюда находим: $BM : MC = \left[3\cos(\alpha/2) - 4\cos^3(\alpha/2)\right] : \left[4\cos^3(\alpha/2) - 2\cos(\alpha/2)\right]$. Сокращая числитель и знаменатель на отличный от нуля множитель $\cos(\alpha/2)$, и пользуясь формулой понижения степени, приводим это отношение к виду $BM : MC = (1 - 2\cos\alpha) : (2\cos\alpha)$. По условию это отношение есть

$3:2$, поэтому $\cos\alpha = 0{,}2$. **Ответ** $0{,}2$**.**

В следующей задаче система алгебраических уравнений интересна тем, что находить значения неизвестных по отдельности не нужно.

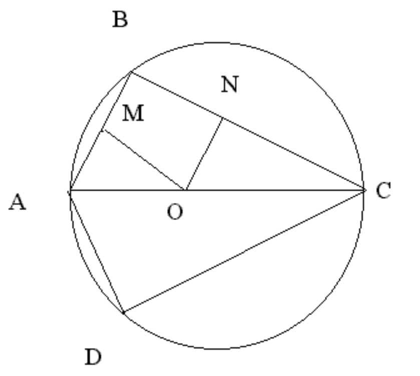

Рис. 5

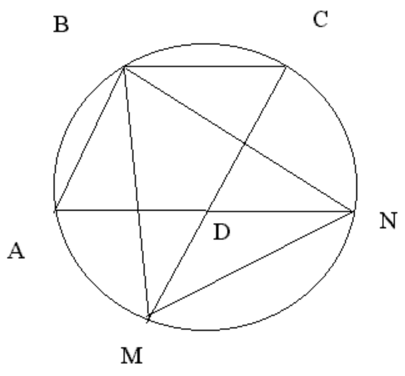

Рис. 6

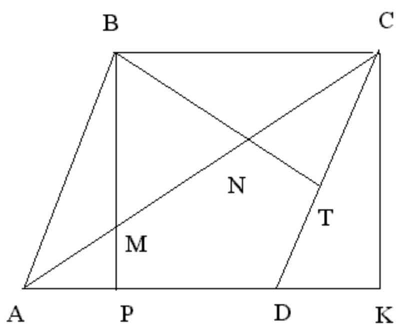

Рис. 7

5. В четырехугольнике два противоположных угла – прямые. Найти его площадь, если радиус вписанной в него окружности равен 7, а радиус описанной около него окружности равен 12.

Решение. На рис. 5 $ABCD$ – данный четырехугольник. Так как углы ABC и ADC прямые, то $AB^2 + BC^2 = AD^2 + DC^2$ или $(AB - DC)(AB + DC) = (AD - BC)(AD + DC)$. Но в $ABCD$ можно вписать окружность, поэтому $AB + DC = AD + DC$. Из предыдущего равенства $AB - DC = AD - DC$, в итоге $AB = AD, DC = BC$ и четырехугольник представляет собой два равных прямоугольных треугольника с общей гипотенузой. Диагональ AC, равная $2R$, является биссектрисой угла BAD, так что центр вписанной окружности лежит в точке O, а $r = OM = ON$ – ее радиусы. Положим $AB = AD = a, BC = DC = b$. Тогда искомая площадь четырехугольника есть $S = ab$ и $a^2 + b^2 = 4R^2$. Из треугольника ABC получаем, что $(a+b)r = S$. Из двух последних равенств надо исключить a и b, для этого возведем второе из них в квадрат и в силу первого получим: $\left(4R^2 + 2S\right)r^2 = S^2$. Подстановка числовых данных дает уравнение $S^2 - 98S - 28224 = 0$ с положительным корнем $S = 224$. **Ответ** 224.

Если в процессе решения появляется квадратное уравнение, то приходится решать вопрос об отборе корней.

6. В ромбе $ABCD$ с острым углом BAD через вершины A, B, C проведена окружность, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и продолжение стороны CD в точке N. Площади треугольника MBN и ромба $ABCD$ относятся как 28:25. Найдите $\cos\angle BAD$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный ромб (рис. 6), его сторона $AB = a$, его острый угол $BAD = \alpha$. Тогда площадь ромба есть $S_{ABCD} = a^2 \sin\alpha$, его диагональ $AC = 2a\cos(\alpha/2)$ и так как окружность описана около треугольника ABC, то ее радиус $R = \dfrac{a}{2\sin(\alpha/2)}$. Далее $\angle BNM = \angle BAM = \alpha$, аналогично $\angle BMN = \angle BCN = \alpha$, так что треугольник MBN равнобедренный и $\angle MBN = 180^\circ - 2\alpha$. Около треугольника MBN описана окружность радиуса R, поэтому $BM = 2R\sin\alpha = 2a\cos(\alpha/2)$, площадь этого треугольника есть $S_{MBN} = 0{,}5BM^2 \sin\left(180^\circ - 2\alpha\right) = 2a^2\cos^2(\alpha/2)\sin 2\alpha$ и заданное отношение площадей $S_{MBN}/S_{ABCD} = 2\cos\alpha(1+\cos\alpha)$. По условию оно равно 28:25, положительный корень квадратного уравнения $\cos\alpha = 0{,}4$. **Ответ** 0,4.

7. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B тупого угла ABC опущены перпендикуляры на стороны AD и DC. Эти перпендикуляры пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM : NC = 4 : 25, \cos\angle BAD = 5/7$. Найдите отношение $AB : AD$.

Решение. На рис. 7 $ABCD$ – данный параллелограмм, $BP \perp AD, BT \perp CD$. Пусть $\angle BAD = \alpha, \cos\alpha = 5/7, \angle CAD = \beta$. Так как $\angle BCD = \alpha$, то $\angle ACD = \angle CAB = \alpha - \beta$. Из треугольников ABP и AMP получаем, что $AM = \dfrac{AB\cos\alpha}{cos\beta}$. Из треугольников BCT и CNT с учетом равенства $BC = AD$ находим, что $NC = \dfrac{AD\cos\alpha}{cos(\alpha-\beta)}$. Поэтому $\dfrac{AM}{NC} = \dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$. Полагая $x = \dfrac{AB}{AD}$, получаем $\dfrac{AM}{NC} = x\left(\cos\alpha + \operatorname{tg}\beta\sin\alpha\right)$. Из этого соотношения надо исключить $\operatorname{tg}\beta$, проведем $CK \perp AD$. Из треугольника ACK, в котором $CK = AB\sin\alpha$ и $AK = AD + DK = AD + AB\cos\alpha$ находим, что $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{AB\sin\alpha}{AD + AB\cos\alpha} = \dfrac{x\sin\alpha}{1 + x\cos\alpha}$. После простых преобразований получается, что $\dfrac{AM}{NC} = \dfrac{x(x+\cos\alpha)}{1+x\cos\alpha}$. Подстановка числовых данных задачи приводит к уравнению $25x^2 + 15x - 4 = 0$ с положительным корнем $x = 0,2$. **Ответ** $0,2$.

В двух заключительных задачах для однозначного выбора корней квадратного уравнения приходится вводить в условие дополнительное требование.

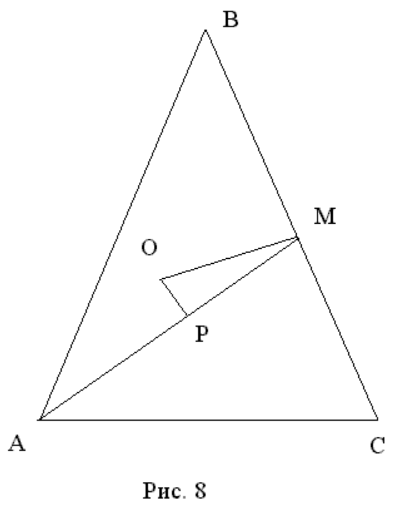

Рис. 8

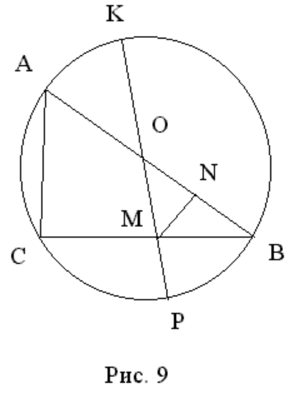

Рис. 9

8. Около равнобедренного треугольника $ABC\left(AB=BC\right)$ описана окружность. Вторая окружность проходит через вершину A и касается стороны BC в ее середине. Радиусы этих окружностей относятся как $4:3$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать $\cos\angle BAC$.

Решение. Пусть ABC (рис. 8) – треугольник, в котором $AB=BC=a, \angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Тогда радиус описанной окружности есть $R=a/(2\sin\alpha)$. Так как вторая окружность проходит через вершину A и середину M стороны BC, то ее центр лежит на серединном перпендикуляре OP к отрезку AM. Так как эта окружность касается стороны BC в точке M, то ее центр лежит на перпендикуляре OM к BC. В итоге центр лежит в точке O, а $\rho=OM$ – ее радиус. При этом $\rho=\dfrac{PM}{\cos\angle OMP}=\dfrac{AM}{2\cos\left(90^\circ-\angle AMC\right)}=\dfrac{AM}{2\sin\angle AMC}$. В треугольнике AMC используем теорему синусов: $\sin\angle AMC=\dfrac{AC\sin\alpha}{AM}=\dfrac{2a\cos\alpha\sin\alpha}{AM}$. Поэтому $\rho=\dfrac{AM^2}{4a\cos\alpha\sin\alpha}$ и теперь в треугольнике AMC используем теорему косинусов: $AM^2=\dfrac{a^2\left(1+8\cos^2\alpha\right)}{4}$. Следовательно, $\rho=\dfrac{a}{2\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+8\cos^2\alpha}{8\cos\alpha}$ или $\dfrac{\rho}{R}=\dfrac{1+8\cos^2\alpha}{8\cos\alpha}$. Отсюда с учетом данных задачи получается уравнение $8\cos^2\alpha-6\cos\alpha+1=0$ с корнями $\cos\alpha_1=0,5, \cos\alpha_2=0,25$. По условию из них надо выбрать меньший. **Ответ** $0,25$.

9. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность радиуса 40. Окружность радиуса 15 с центром на большем катете касается гипотенузы и описанной окружности. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь треугольника ABC.

Решение. Пусть BC – больший катет треугольника ABC, M – центр окружности, O – середина AB, т. е. центр описанной окружности (рис. 9). Отрезок MO продолжим до пересечения с описанной окружностью в точках K и P. Проведем $MN \perp AB$, пусть $AO = OB = R = 40, MN = MP = r = 15$ и $\angle ABC = \alpha$. То, что BC – больший катет, означает, что $\operatorname{tg}\alpha < 1$. Через точку M внутри окружности проходят хорда и диаметр, поэтому $KM \cdot MP = CM \cdot MB$. Теперь найдем каждый из этих отрезков: $KM = 2R - r, MB = r/\sin\alpha$ и $CM = 2R\cos\alpha - r/\sin\alpha$. Подстановка в предыдущее равенство после несложных преобразований приводит к уравнению $2R\operatorname{tg}^2\alpha - 2R\operatorname{tg}\alpha + r = 0$, при заданных значениях R и r оно имеет корни $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}25, \operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}75$. Оба эти корня меньше единицы, так что существуют два треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Поскольку искомая площадь треугольника ABC есть $S = 0{,}5AC \cdot BC = R^2 \sin 2a$ и $\sin 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha / \left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)$, то $\sin 2\alpha_1 = 8/15, \sin 2\alpha_2 = 24/25$. Выбрав из этих двух значений большее, получаем $S = 1600 \cdot (24/25) = 1536$. **Ответ** 1536.