

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
1 курс, 2024 г.

1. Найдите натуральное число n , если $\left[\sqrt{n+17}\right] = 20$, n делится на 3 и остаток от деления n на 17 равен 5. $[x]$ — целая часть числа x .

2. Решите систему

$$\begin{cases} \left| \sin \frac{2\pi x}{3} \right| = 1, \\ \sqrt{18 + 3x - x^2} < 3. \end{cases}$$

3. На фабрике несколько одинаковых поточных линий выпускали вместе 15000 единиц продукции в день. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, а их количество увеличилось на 5. При этом фабрика стала выпускать 33792 единиц продукции в день. Сколько поточных линий было на фабрике до реконструкции?

4. Треугольник ABC , где $A(1; 1; -2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-3; 3; 2)$ спроектирован на некоторую плоскость в отрезок длины $4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от этой плоскости до вершины A , если плоскость проходит через точку $M(1; 1; -1)$.

5. При каких значениях параметра a фигура

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq 1 \\ (x-a+\sqrt{2})^2 + (y+a-\sqrt{2})^2 \leq 1 \end{cases}$$

имеет наибольшую возможную площадь?

6. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(45^x - 2024 \right)^{\frac{1}{\sqrt{2023+x}-45}}.$$

7. Петя и Вася решили заполнить квадратную матрицу порядка 3, поочередно записывая в еще не занятые позиции какие-то свои числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Первым число записывает Петя. Он утверждает, что всегда может подобрать свои числа так, что определитель получившейся матрицы окажется равным нулю.

Прав ли Петя? Ответ обоснуйте.

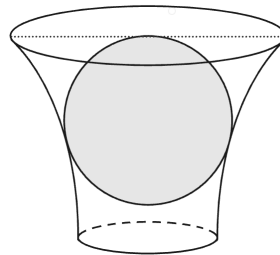
РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-5 курс, 2024 г.

1. Найдите натуральное число n , если $\left[\sqrt{n+17}\right] = 20$, n делится на 3 и остаток от деления n на 17 равен 5. $[x]$ — целая часть числа x .
2. На фабрике несколько одинаковых поточных линий выпускали вместе 15000 единиц продукции в день. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, а их количество увеличилось на 5. При этом фабрика стала выпускать 33792 единиц продукции в день. Сколько поточных линий было на фабрике до реконструкции?
3. Специальная функция Лобачевского — интегральная функция, задаваемая формулой $L(x) = -\int_0^x \ln |2 \sin t| dt$, $x \in \mathbb{R}$. Найдите $\int_{-1}^1 L(x) dx$.

4. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(45^x - 2024\right)^{\frac{1}{\sqrt{2023+x}-45}}.$$

5. Треугольник ABC , где $A(1; 1; -2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-3; 3; 2)$ спроектирован на некоторую плоскость в отрезок длины $4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от этой плоскости до вершины A , если плоскость проходит через точку $M(1; 1; -1)$.
6. В вазе, имеющей форму усеченного однополостного гиперболоида $H : x^2 + y^2 = z^2 + 1$, $0 \leq z \leq h$, застрял круглый мяч радиуса 3 так, что верхняя точка мяча оказалась на одном уровне с верхним краем вазы. Во сколько раз объем вазы больше объема мяча?



7. Найдите функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$, если они удовлетворяют задаче Коши

$$\begin{cases} x' = x^2 + 4y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
1 курс, 2023 г.

1. Найти наименьшее натуральное число N такое, что как сумма его цифр, так и сумма цифр числа $N + 1$ кратны 11.
2. Площадь трапеции равна 2, а сумма ее диагоналей равна 4. Найти высоту трапеции.
3. Найдите все корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?
5. Задана последовательность $a_n = \underbrace{f(f(\dots(f(n)\dots)))}_{n \text{ раз}}$, где $f(n) = \frac{n}{p} + q, n \in \mathbb{N}$.

Найдите все целые значения параметров p и q , такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$.

6. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 + (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2} \end{aligned}$$

и установите, при каком условии в нем достигается равенство.

7. Из произвольной точки A параболы $y = x^2$ проведены два луча, пересекающие параболу $y = x^2 + a^2$. Пусть B и C — ближайшие к A точки пересечения. Докажите, что площадь криволинейного треугольника ABC с «параболической» стороной BC не превосходит $\frac{2a^3}{3}$.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-5 курс, 2023 г.

1. Миша, Петя и Коля одновременно стартовали в зачете на 150 метров. Когда Миша финишировал, Петя находился в 20 метрах позади него. А когда финишировал Петя, Коля находился позади него в 15 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Миша и Коля, когда Миша финишировал? Предполагается, что скорости мальчиков постоянны и различны.

Ответ: 33.

Решение.

Пусть x , y , z — скорости Миши, Пети и Коли соответственно, s — искомое расстояние. Тогда

$$\begin{cases} \frac{150}{x} = \frac{130}{y}, \\ \frac{150}{y} = \frac{135}{z}, \\ \frac{y}{150} = \frac{z}{150-s}, \end{cases}$$
$$s = 150 - \frac{150z}{x} = 150 - \frac{130}{y} \cdot \frac{135y}{150} = 33.$$

2. Решите уравнение $|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x$.

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Раскроем модуль двумя способами

а) При $1 - 2 \sin x + \cos x \geq 0$ получаем $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$, $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что решение удовлетворяет условию раскрытия модуля.

б) При $1 - 2 \sin x + \cos x < 0$ получаем $4 \sin x - 2 \cos x = \cos 2x$.

Заметим, что $1 - 2 \sin x + \cos x < 0 \Rightarrow 4 \sin x - 2 \cos x > 2$. Тогда

$4 \sin x - \cos x > 2 + \cos x \geq 1 \geq \cos 2x$. Следовательно, во втором случае уравнение не имеет решений.

3. Пусть x_0 — корень некоторого уравнения

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами, но не имеющего целых корней, а также корень некоторого уравнения третьей степени с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда x_0 — корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Решение.

Обозначим $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $P(x_0) = 0$,

$T(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$, $T(x_0) = 0$.

Так как старший коэффициент $P(x)$ равен 1, то по теореме о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами x_0 — иррациональное число.

Тогда $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами, а степень $R(x)$ равна 0, 1 или 2 по теореме Безу. Причем $R(x)$ не может быть тождественно равным нулю, так как в этом случае $Q(x) = x - a$, где a рационально и является корнем $P(x)$.

Но $0 = P(x_0) = R(x_0)$, то есть x_0 — это корень $R(x)$ (так что $R(x)$ не константа), но если $R(x)$ является многочленом первой степени, то его единственный корень рационален. Поэтому это многочлен второй степени.

4. Найдите площадь сечения эллипсоида

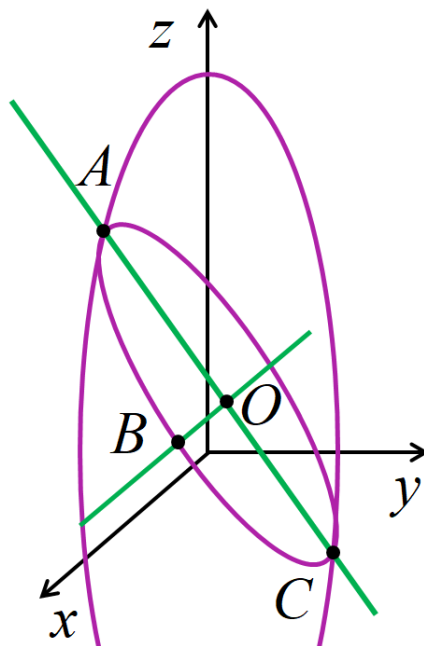
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{64} \leq 1$$

плоскостью $z + 2y = 1$.

Ответ: $19,75\pi$.

Решение.

Пересечение эллипсоида и плоскости — это эллипс (в случае, конечно, что они пересекаются более, чем в одной точке, а в этом легко убедиться в нашем случае). Для нахождения площади эллипса достаточно найти его полуоси a и b и воспользоваться формулой $S = \pi ab$ (ее также легко получить путем интегрирования или аффинного преобразования).



Заметим, что плоскость параллельна оси Ox , а также, что рассматриваемая конструкция является симметричной относительно плоскости Oyz . Следовательно, сечение также симметрично и одна его ось лежит в плоскости Oyz , а вторая ей перпендикулярна, то есть параллельна оси Ox .

Точки пересечения плоскости и эллипсоида в плоскости Oyz находим путем решения системы:

$$\begin{cases} z + 2y = 1, \\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{64} = 1. \end{cases}$$

$$C(0; 0,1 + 0,2\sqrt{79}; 0,8 - 0,4\sqrt{79}), A(0; 0,1 - 0,2\sqrt{79}; 0,8 + 0,4\sqrt{79}).$$

Центром эллипса будет середина отрезка AC — точка $O(0; 0,1; 0,8)$.

Точку на эллипсоиде, через которую проходит перпендикуляр к Oyz , проведенный через точку O , находим, подставив координаты точки O по y и z в уравнение эллипсоида: $B(\sqrt{79 \cdot 25/80}; 0,1; 0,8)$. Находим полуоси, как расстояния между соответствующими точками, и вычисляем площадь

$$AO = \sqrt{79/5}, BO = \sqrt{79 \cdot 25/80},$$

$$S = \pi \sqrt{\frac{79 \cdot 79 \cdot 25}{80 \cdot 5}} = \pi \cdot \frac{79 \cdot 5}{20} = 19,75\pi.$$

5. Решите уравнение

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{n!}.$$

Ответ: 1.

Решение.

Заметим, что первая сумма является суммой геометрической прогрессии, а вторая — рядом Маклорена для экспоненты

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{3} \right)^n = \frac{4}{x^2 + 3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\ln x)^n}{n!} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Причем первый ряд сходится при $x^2 < 3$, а второй сходится везде на области определения, то есть при $x > 0$. Тогда при $0 < x < \sqrt{3}$

$$\frac{4}{x^2 + 3} = \frac{1}{x}, \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x = 1.$$

6. Докажите, что длина дуги синусоиды $y = \sin x$, где $x \in [0; \pi/2]$, меньше 2.

Решение.

Воспользуемся формулой длины дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Сведем второй отрезок интегрирования к первому, сделав замену $t = \pi/2 - x$. Тогда

$$L = \int_0^{\pi/4} (\sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx,$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \sin^2 x})^2 &= 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x + 2\sqrt{2 + 2\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= 3 + 2\sqrt{2 + 0,25 \sin^2 2x} \leq 3 + 2\sqrt{2 + 0,25} = 6, \end{aligned}$$

$$L \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{4} < \frac{3,2 \cdot 2,5}{4} = 2$$

7. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}, & x < 0, \\ 2 \cos \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Докажите, что в точке $x = 0$ она имеет первую и вторую производные, и вычислите их.

Ответ: -1 ; $1/6$.

Решение.

Производные можно найти непосредственным вычислением односторонних пределов в точке, например, с помощью правила Лопиталя. Но приведем более изящное решение.

Разложим обе функции в ряд Маклорена.

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{-x})^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^n}{n!} (1 + (-1)^n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}, \\ 2 \cos \sqrt{x} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Таким образом мы видим, что эти ряды полностью совпадают и абсолютно сходятся на соответствующих полуосях. Тогда односторонние производные любого порядка слева и справа тоже совпадают, то есть производные существуют и равны коэффициентам ряда Маклорена (не забудем при этом, что $n!$ в производную не входит)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n x^n}{(2n)!}, \\ f^{(n)}(0) &= \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(2n)!}, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина

Олимпиада по высшей математике

1 курс, 2022

1. В какой степени входит число 11 в разложение числа $63! - 61!$

на простые множители? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$)

2. Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(2 + \sin y) = 2$.

3. Вычислить определитель порядка $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

4. Пусть A, B, C, D – последовательные вершины правильного 12-угольника. Выразить вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

5. На плоскости построить множество таких точек $(k; b)$, что прямая $y = kx + b$ не пересекает параболу $y^2 = 4x$.

6. Построить график функции $y = \frac{\sqrt{x \sin^2 x}}{\sin x}$.

7. Составить такую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty$.

8. Отношение корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равно 2. Найти такую функцию $f(x)$, что $f(p) = q$ для любой из вышеуказанных пар.

9. Найти наибольший элемент последовательности

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+150}.$$

10. Найти все такие матрицы B , что $AB = BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2022 г.

1. Пара действительных чисел p и q такова, что отношение корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равно 2. Найдите такую функцию $f(x)$, что $f(p) = q$ для любой из вышеуказанных пар.
2. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{x \sin^2 x}}{\sin x}$.
3. Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки прямолинейного берега. Лагерь находится на берегу в 15 км от этой точки. В лагерь отправляют гонца, который движется со скоростью 5 км/ч пешком и 4 км/ч на веслах. На каком расстоянии от лагеря он должен пристать, чтобы добраться в лагерь за наименьшее время?
4. На плоскости выбраны точки A, B, O . Найдите геометрическое место точек X , для которых существует такое $t \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$.
5. Существует ли такое вещественное α , что число $\cos \alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha$ рациональны? А если дополнительно число $\cos 5\alpha$ тоже должно быть рациональным? Ответ обоснуйте.
6. Многочлен задан при помощи определителя

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & x & 1 \end{vmatrix}.$$

Найдите коэффициент этого многочлена при x^3 .

7. Найдите объем многогранника, ограниченного касательными плоскостями к эллипсоиду $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3} = 1$ в точках $(\pm 2; \pm 1; \pm 1)$ (8 различных точек со всевозможными комбинациями знаков).
8. Вычислите интеграл
$$\int_1^4 \frac{\ln\left(\frac{5}{x} - 1\right) dx}{\ln x \ln(5-x)}.$$
9. Вычислите предел
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4\sqrt[3]{4}\sqrt[9]{4}\sqrt[27]{4}\dots \sqrt[3^n]{4}).$$
10. Из 28 учеников 11 класса 9 прочитали и «Войну и мир», и «Преступление и наказание». Встретившись в классе, все, кто прочитал обе книги, пожали друг другу руки, а каждый, кто прочитал только одну из них, пожал руку каждому, кто прочитал только вторую, причем в обоих случаях число рукопожатий оказалось одинаковым. Сколько учеников 11 класса не прочитали ни одну из этих книг, если известно, что их число нечетно?

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина

Олимпиада по высшей математике

1 курс, 2021

1. Что больше: 2^{100} или 999^9 ? Ответ обосновать.
2. Отрезки с длинами a, b, c образуют треугольник. Докажите, что отрезки с длинами $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ также являются сторонами некоторого треугольника.
3. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{4x - |x| - |2x - a|}{x^2 - a^2} \leq 0$$

является некоторый луч.

4. Определитель порядка n состоит из цифр от 0 до 9. Если каждую его строку прочесть как n -значное число, то оно делится на 17. Доказать, что сам определитель делится на 17.
5. Отрезок длины 3 движется так, что его концы остаются на положительных полуосях OX и OY . Какую линию описывает точка, находящаяся на расстоянии 1 от одного из концов отрезка?
6. Построить график функции $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ ($x \geq 0$).
7. Вычислите производную 2021-го порядка от функции $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.
8. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \frac{1}{2}x_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

при целых a_{ij} не имеет ненулевых решений.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2021 г.

1. В городе Уроборос у всех семей были отдельные дома. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, который раньше занимала другая семья. В связи с этим было решено покрасить все дома в красный, синий или зеленый цвет, причем так, чтобы для каждой семьи цвет нового и старого домов не совпадал. Можно ли это сделать?

2. Матрица A вида

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

такова, что $A = A^{-1}$. Найти $a + b + c$, если известно, что $-1 < b < a < 0$.

3. В ряд стоят 2026 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

4. Число q таково, что параболы $y = 2x^2$ и $y = x^2 - 6x + q$ пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение вертикальной прямой, делящей площадь этой фигуры пополам.

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и середины S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST . Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST . Найдите длину отрезка MN .

6. Найти $f'_y(x; x^2)$ для дифференцируемой функции $f(x; y)$ удовлетворяющей условиям

$$f(x; x^2) = 5, \quad f'_x(x; x^2) = x.$$

7. Найдите экстремумы функции

$$y(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0 \\ (x)^{x^3}, & x > 0 \end{cases}.$$

Ответ обоснуйте.

8. Функция $g(x)$ нечетна. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + e^{g(x)}}.$$

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике, 1курс, 2020

1. Известно, что $x^2 + 5x + 1 = 0$. Найти $x^{64} + x^{-64}$.
2. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Доказать, что для всех точек окружности сумма квадратов расстояний до вершин квадрата постоянна, и найти эту величину.

3. Найти все корни уравнения
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K , а на диагонали AC – точка M так, что $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Доказать, что точки K, M, B лежат на одной прямой.
5. Биссектрисы внутренних углов треугольника лежат на прямых $2x + 11y + 6 = 0$ и $9x - 13y + 27 = 0$. Составить уравнение прямой, на которой лежит сторона треугольника, не проходящая через вершину $A(-2, -7)$.
6. Известно, что $f(1) = 2$ и что при любых x, y
 $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. Найти для любого целого n $f(n)$.
7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$.
8. Известно, что A – матрица размера 3×2 , B – матрица размера 2×3
и что $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти BA .

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2020 г.

1. У 25 равных квадратиков каждую сторону покрасили в один из n цветов. Можно прикладывать квадратики друг к другу одноцветными сторонами. Оказалось, что по этому правилу для каждого из используемых цветов можно сложить из всех квадратиков большой квадрат 5×5 таким образом, чтобы все стороны большого квадрата были покрашены в этот цвет. Найдите наибольшее возможное n .
2. Найдите наименьшее натуральное значение k , при котором система

[illegible]

имеет единственное решение.

3. Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выезжает велосипедист и выходит пешеход. Скорость велосипедиста 25 км/ч. После встречи они поворачивают назад и возвращаются каждый в свой город, причем велосипедист при этом движется с прежней скоростью, а пешеход увеличивает свою скорость на 1 км/ч. С какой скоростью должен идти пешеход, чтобы его время нахождения в пути было наибольшим?
4. Найдите предел последовательности:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}, \quad n \geq 1, \quad x_1 > 0, \quad a > 0.$$

5. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, одна из которых расположена строго внутри другой (окружности не имеют общих точек).
6. Докажите равенство

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$$

7. Общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ задан формулой

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \neq 3k \\ -\frac{2}{n}, & n = 3k \end{cases}.$$

Сходится ли этот ряд? Ответ обоснуйте.

8. Единичный куб проецируется на некоторую плоскость и на перпендикулярную к ней прямую. Докажите, что площадь проекции в первом случае численно равна длине проекции во втором.

28.11.2019

I курс

1. Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = 0,7$.
2. Найти наименьшую возможную сторону квадрата, внутри которого можно разместить без наложения 5 квадратов со стороной 1.
3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}$, если $x_1; x_2; x_3$ – корни уравнения $8x^3 - 4x + 1 = 0$.
4. Вычислить $\cos 7^\circ + \cos 79^\circ + \cos 151^\circ + \cos 223^\circ + \cos 295^\circ$.
5. Составить уравнения всех окружностей, проходящих через точки $A(-2; 4), B(6; -4)$.
6. Существует ли такая функция $f(x)$, что $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 - \frac{1}{x^4} + 2$?
7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 6x (\sin x - \cos x)$.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2019 г.

1. По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: "Ты — мальчик" или "Ты — девочка". Таких фраз оказалось поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек стоит по кругу?
2. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения медиан граней BCD, CDA, ABD и ABC соответственно в тетраэдре $ABCD$. Найдите отношение объема тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ к объему тетраэдра $ABCD$.

3. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{8n - \sqrt{6}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n - 1 + \sqrt{2n + 1}}} \right)$.

4. Найдите ранг матрицы при всех действительных значениях λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & \dots & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

5. Докажите, что для $x > 0$ и натурального n имеет место неравенство

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^{100\pi} \arccos(\cos x) \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

7. Решите дифференциальное уравнение

$$x^2 y (y dx + x dy) = 2y dx + x dy.$$

8. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy \operatorname{tg}(x+y)}{x^2 - xy + y^2}$.

9. Пусть A и B — невырожденные матрицы размера 3×3 с вещественными элементами. Докажите, что

$$A - (A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} = ABA$$

(если все указанные обратные матрицы существуют).

10. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определенного места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

28.11.2018

I курс

1. Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n . Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - 2n$, если n – трёхзначное число?
2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом:
$$x_1 = a; x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1} \quad \text{при } n \geq 1.$$
 Найти все a , при которых последовательность определена и имеет конечный предел.
3. Для каких чисел a и b найдётся многочлен степени не выше 2 $P(x)$ такой, что $P(0) = P(1) = 0$ и $P'(a) = b$?
4. Найти определитель матрицы $A = \{a_{ij}\}$, если $a_{ij} = \min(i, j); i, j = 1, 2, \dots, n$.
5. Пусть A – матрица размера $m \times n$, имеющая ранг 1. Доказать, что найдутся матрицы B и C размеров $m \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, такие, что $A = BC$.
6. Из произвольной точки гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличной от $(1; 0)$ и $(-1; 0)$, проведены две касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, касается гиперболы.
7. Доказать, что для любого натурального n число $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ является целым и нечётным.

28.11.2018

II-IV курсы

1. Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n . Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - 2n$, если n – трёхзначное число?
2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом:

$x_1 = a; x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$ при $n \geq 1$. Найти все a , при которых последовательность определена и имеет конечный предел.

3. Пусть A – матрица размера $m \times n$, имеющая ранг 1. Доказать, что найдутся матрицы B и C размеров $m \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, такие, что $A = BC$.
4. Из произвольной точки гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличной от $(1; 0)$ и $(-1; 0)$, проведены две касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, касается гиперболы.

5. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 2018x^5 + 2019x^3 - 20202020x + e}{\cos^2 x} dx$.

6. Доказать, что каждое решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 + t^4 + \cos x} \text{ ограничено.}$$

7. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

30.11.2017

I курс

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С.» В: «С по рангу выше, чем А.» Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»
2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$.
3. Найдите все возможные тройки чисел $(x; y; z)$, если известно, что $x! + y! = 24z + 2017$, числа x и y – натуральные, а z – целое и нечётное.
4. Сколько различных векторов длины $5\sqrt{2}$ с целочисленными координатами существует в 3-мерном пространстве?
5. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx$.
6. Пусть L – точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Найдите длину отрезка KC .
7. Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_0 = 0$;
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 243, & \text{если } a_n \leq 0, \\ a_n - 343, & \text{если } a_n > 0. \end{cases}$$
 Найдите $\min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$
8. Существует ли в 3-мерном пространстве треугольник площади $\sqrt{7}$, вершины которого имеют целочисленные координаты?
9. При каких значениях параметра a уравнение $4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$ имеет ровно три различных решения?
10. Найти все целочисленные решения матричного уравнения

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \text{ если } A^T = A.$$

30.11.2017

II-IV курсы

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С.» В: «С по рангу выше, чем А.» Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»
2. Найдите все возможные тройки чисел $(x; y; z)$, если известно, что $x! + y! = 24z + 2017$, числа x и y – натуральные, а z – целое и нечётное.
3. При каких значениях параметра a уравнение $4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$ имеет ровно три различных решения?
4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$.
5. Доказать, что $\underbrace{\sin \sin \sin \dots \sin}_{2017 \text{ раз}} 1 < \frac{1}{12}$.
6. При каких значениях константы $\alpha > 0$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^{-\alpha})^n$?
7. Найти интеграл $\int \frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^6} dx$.
8. Сколько несовпадающих частных производных 2017-го порядка имеет функция $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$?
9. Даны константы $A, B \in \mathbb{R}$ и $m > k > 0$. Найти предел $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin kt + B \sin mt)^2 dt$.
10. Решить задачу Коши $\begin{cases} y'' \cos x - 2y' \sin x + 8y \cos x = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

05.12.2016

I курс

1. (10 баллов)

В большом бочонке 8 литров нефти. Требуется разлить эту нефть пополам в две ёмкости. В наличии имеется еще два пустых бочонка: в один входит 5 литров, в другой – 3 литра. Как разлить нефть не более чем за 7 переливаний?

2. (15 баллов)

Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^n$ при любом значении a .

3. (15 баллов)

Решить уравнение $X^{2016} = X^2$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$; $x^2 + y^2 > 0$.

4. (15 баллов)

Может ли сечение куба (некоторой плоскостью) быть правильным пятиугольником?

5. (15 баллов)

Решите неравенство $y^2 + y^3 + \sqrt[4]{y^3 - x^2 - 3xy} \leq 5xy$ в действительных числах.

6. (15 баллов)

Докажите, что геометрическое место середин параллельных отрезков с концами на разных ветвях гиперболы есть прямая.

7. (15 баллов)

Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n, & \text{если } n \text{ чётно} \\ a_n + 1, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$

Найдите остаток от деления a_{2016} на 24.

05.12.2016

II-IV курсы

1. (15 баллов)

Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком (состоящим, очевидно, из одного торта, одной банки варенья и одной кастрюльки молока)?

2. (15 баллов)

Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$.

3. (20 баллов)

Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

4. (20 баллов)

Пусть квадратные матрицы из действительных чисел A и B такие, что $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$. Приведите пример таких матриц и докажите, что $\det A = \det B$.

5. (15 баллов)

Решите дифференциальное уравнение $x(x + y)y' = x + xy + y^2$.

6. (15 баллов)

Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$.

I курс, декабрь 2015

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Могут ли $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ быть одновременно ненулевыми рациональными числами?
3. Решить уравнение: $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)(2 + \sin y) = 2$.
4. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
5. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a , элементы его побочной диагонали равны b , а остальные элементы равны нулю.
6. Докажите тождество: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
7. Найти $\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}$, если $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + \sqrt{1 + x^4}$ при $x > 0$.
8. Вычислите предел (или же установите, что он не существует):
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt{\sin \frac{1}{x^2}}.$$
9. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \dots$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует и не зависит от x_1 ($x_1 \in \mathbb{R}$).
10. Найдите $\det A$, если A – матрица размера 2×2 и $A^2 + E = 0$.

II-IV курсы, декабрь 2015

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
3. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a , элементы его побочной диагонали равны b , а остальные элементы равны нулю.
4. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \dots$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует и не зависит от x_1 ($x_1 \in \mathbb{R}$).
5. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^4 - y^2 + 2x^2y}$.
6. Длина верёвки 12 метров. Каким образом нужно разрезать верёвку на 3 части длиной x, y, z (метров), чтобы величина xy^2z^3 приняла наибольшее возможное значение.
7. Вычислите неопределённый интеграл: $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln^2 x} dx$.
8. Вычислите предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$.
9. Найдите общее решение уравнения $y = xy' + x^2 y''$.
10. Найдите сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$.

04.03.2015, 1-4 курсы

1. Плоскость выкрашена в три цвета. Доказать, что для любого положительного числа d найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно d .
2. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = x^2 - 4$.
3. Докажите, что определитель любого порядка (не менее двух), каждый из элементов которого по модулю равен 1, сам не может равняться по модулю 1.
4. Постройте график функции $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1) \operatorname{arctg}(x^n)$
5. При каких a, b функция $f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ b, & x = 1 \\ \frac{x \ln x}{x^2 - 1}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$ дифференцируема при $x > 0$?
6. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
7. Вычислить $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2 + i^2}$.
8. Докажите, что все решения уравнения $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ ограничены на всей числовой оси.
9. Найдите многочлен $P(x)$ третьей степени с целочисленными коэффициентами, такой что $\int_0^1 xP(x)dx = \int_0^1 x^3P(x)dx = \int_0^1 x^5P(x)dx = 0$.
10. Для всякой ли матрицы A второго порядка можно найти такие числа p, q , что $A^2 + pA + qE = 0$?

1 курс, декабрь 2014

1. Дроби $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$ образуют арифметическую прогрессию. Можно ли составить арифметическую прогрессию, содержащую 4 члена вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и такую, что все её члены различны? А аналогичную, содержащую 10 членов такого вида? А 1000 членов?
2. Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 21C & 7Z & 133c \\ 15A & 5X & 95a \\ 3B & Y & 19b \end{vmatrix}$. Вычислить $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.
3. Вычислите $\cos 7^\circ + \cos 79^\circ + \cos 151^\circ + \cos 223^\circ + \cos 295^\circ$.
4. Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются под углом 30° . Докажите, что хотя бы одно из чисел A_1, B_1, A_2, B_2 иррационально.
5. Найдите область определения функции $y = \log_2 \log_3 \log_4 \log_5 x$.
6. Найдите значение выражения $\sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \dots}}}}}}$.
7. Вычислите $y^{(n)}$ (n -ю производную, $n \in \mathbb{N}$) для функции $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.
8. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 + x - e^x}$.
9. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (т.е. такие матрицы B , что $AB = BA$).
10. Может ли сечением куба (плоскостью) быть правильный пятиугольник?

I курс, март 2014

1. Доказать, что многочлен $\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{24} + \frac{x}{30}$ при любых целых x принимает целые значения.
2. Постройте линию, задаваемую уравнением $|y| = (|x| - 1)(|x| - 3)$.
3. Дано: $ABCD$ — прямоугольник, M — любая точка пространства. Доказать, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.
4. Найти A^{2014} , если $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2014x}$.
6. Найти a и b , если $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x^3+ax+b} = -3$.
7. Найти $f(x)$, если $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1) \\ f(x) + f(x-1) = x \end{cases}$.
8. Доказать, что $\sin x + tgx > 2x$ при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
9. Пусть Δ_n — определитель порядка n , в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу — числами (-1) , остальные элементы — нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14} .
10. Две вершины треугольника фиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании вдвое больше другого. Доказать, что она движется по гиперболе.

II-IV курсы, март 2014

1. Постройте линию, задаваемую уравнением $\log_2(4x^2 + y^2) = \log_2^2(x^2 + 0,25y^2)$.
2. Найти $A^{20142014}$, если $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
3. Доказать, что $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Пусть Δ_n – определитель порядка n , в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами (-1) , остальные элементы – нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14} .
5. Найти $y(x)$, если $y(x) = \int_0^x y^2(t) dt + 2014x$.
6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y_1' = 2014y_1 + y_2 \\ y_2' = 2014y_2 + y_3 \\ y_3' = 2014y_3 \end{cases}$$
7. Функция $f(x)$ положительна на всей оси. Вычислить $\int_a^b \frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.
8. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$.
9. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
10. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ – последовательные корни уравнения $x = \operatorname{tg} x$?

Технари, 1 курс, 2013

1. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+\dots+n^n}{n^n}$.

2. Дифференцируема ли в нуле функция $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$?

3. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$. Доказать, что если $f(0) = f(1) = 0$, то в некоторой точке $(0;1)$ $f'(x) = f(x)$.

4. Решить уравнение $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$.

5. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$ не равен нулю.

6. Найти угол, под которым пересекается парабола $y = px^2$ ($p \neq 0$) и эллипс $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

7. Доказать, что для любого натурального n число $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ является целым и нечетным.

Экономисты , 1 курс, 2013

1. (1 б.) Доказать, что если $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ - медианы $\triangle ABC$, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
2. (2 б.) Вычислить производную функции $y = \log_{(x+5e^{-x})}(\sin \sqrt{x} - \lg(\arcsin x))$.
3. (2 б.) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n} - \ln n}$ на сходимость.
4. (3 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.
5. (3 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.
6. (3 б.) Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x+1)) - \cos(\ln x))$.
7. (3 б.) Найти a и x_0 при условии, что уравнение $3x^4 - 4x^3 + a = 0$ имеет единственный корень x_0 .
8. (3 б.) При каком $\alpha \in \mathbb{R}$ существует вектор $\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 3$, $\vec{a} \times (\vec{j} - \vec{i} + 2\vec{k}) = \alpha \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?
9. (4 б.) Дан треугольник с вершинами $A(0; -4), B(3; 0), C(0; 6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A .
10. (4 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 2, 3, 5. Какова вероятность, что оно делится
а) на 4;
б) на 5?

Экономисты, 2-4 курс, 2013

1. (1 б.) Вычислить производную функции $y = \log_{(x+2)\lg x}(\cos \sqrt{x} - \log_3(\operatorname{arccctg} x))$.
2. (2 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и

$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.

3. (2 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

4. (2 б.) Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x+1)) - \cos(\ln x))$.

5. (3б.) Дан треугольник с вершинами $A(0;-2), B(4;0), C(0;11)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A .

6. (3 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 4, 6, 8. Какова вероятность, что оно делится
- а) на 4;

б) на 5?

7. (3б.) Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$.

8. (3б.) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x = -1$, если $z = x^2 + y^2 + 2y$, где $y(x)$ есть решение уравнения $1 + x + y^2 = e^{x+y^2}$.

9. (5 б.) В круг, куда вписан квадрат, наудачу бросаются 7 точек. Какова вероятность, что 3 точки попадут в квадрат, а 4 – по одной в каждый из образовавшихся круговых сегментов?

10. (6б.) Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |a \cos nx - b \sin nx| dx$, $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, ab > 0$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ПЕРВОГО КУРСА, МАРТ - 2012 г.

1. Найти вторую производную функции $y = \log_{\arctg \sqrt{x}}(\cos x)$. (1 б.)
2. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{3z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+5y-3z-1=0, \\ x-7y-11z+2=0. \end{cases} \quad (1 \text{ б.})$$

3. Найти A и B , при которых $f(x) = \begin{cases} A \sin \pi x, & x \leq 1, \\ 1 + Bx^2, & x > 1 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси. (1 б.)

4. Что больше: e^π или π^e ? Ответ обосновать. (2 б.)
5. Найти производную $(\ln(1 + \sin(2x^3) + e^{-x^2}))'_u$, где $u = \arctg(x^2 + \ln x)$ (2 б.)

6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3 - 3x + 4}{x^2 + x} + e^{-x^2} \sin 2x$ (3 б.)

7. Доказать, что уравнение $e^x \sin x = a$ разрешимо относительно x при любой заданной постоянной величине a . (4 б.)

8. Кардиоида на плоскости xOy задается параметрически двумя уравнениями $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$. Здесь t – параметр, a – положительная постоянная. Показать, что в двух точках кардиоиды, соответствующих значениям параметра t , отличающимся на $\frac{2}{3}\pi$, касательные параллельны. (4 б.)

9. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим? (5 б.)

10. Доказать, что выражение $s = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2$ не изменится, если заменить y на $1/y$. (8 б.)

11. Найти пределы: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(x - \sin x)^2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$ (1 + 1 = 2 б.)

12. Два двугранных угла A и B расположены в пространстве так, что их ребра пересекаются под прямым углом. Одна грань угла B перпендикулярна обеим граням угла A , а другая грань угла B пересекается с гранями угла A по двум лучам, выходящим из точки

пересечения ребер углов A и B . Требуется найти угол ψ между этими лучами. Линейные углы A и B известны и, соответственно, равны α и φ (10 б.)

13. Найти все значения производной y'_x в точке $x = y = 0$, если $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ (6 б.)

14. Последовательность $\{x_n\}$ определена следующим образом:
 $x_0 = a, x_1 = b, x_{n+2} = (x_n + 3x_{n+1})/4$ при $n \geq 0$. Доказать, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

и найти его. (10 б.)