Министерство образования и науки Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА имени И.М. ГУБКИНА

И.Н. Мельникова, Н.О. Фастовец

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(Для факультета АиВТ
кроме специальности «Прикладная математика»)

Москва 2015

УДК

Рецензент:
доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа
имени И.М. Губкина, к.ф.-м.н. А.К. Тюлина

М37 **Мельникова И.Н., Фастовец Н.О.**
Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление (Для факультета АиВТ кроме специальности «Прикладная математика») – М.: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2015. – 92с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих теорию функций комплексного переменного и операционное исчисление в курсе высшей математики. В пособии содержится необходимый теоретический материал, примеры с подробным решением, задачи для самостоятельной работы, а также типовые варианты контрольных работ.

Пособие может использоваться студентами всех специальностей, изучающими теорию функций комплексного переменного и операционное исчисление, а также магистрантами и аспирантами, которые занимаются исследованиями, связанными с применением математических методов. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Содержание

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные понятия

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, i – ***мнимая единица***, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Число x – называется ***действительной частью*** комплексного числа z, а y – ***мнимой***. Обозначение: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

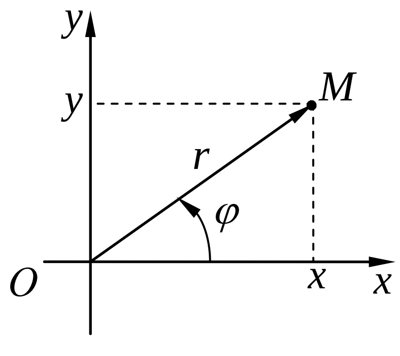
Комплексное число вида $z = x + i0$ отождествляется с действительным числом x.

$z = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $y = 0$.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ ***равны*** тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ (в отношении комплексных чисел понятия «больше» или «меньше» не применяются).

Любое комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости Oxy точкой $M(x,y)$ или радиус-вектором $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью*** и обозначается $\mathbb{C}$, ось Ox называется ***действительной*** осью, а ось Oy – ***мнимой***.



Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется ***модулем*** комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$ или r, то есть

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется ***аргументом*** комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент числа $z \neq 0$ определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi = \arg z + 2\pi k \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\arg z$ $(-\pi < \arg z \le \pi)$ – ***главное значение аргумента***, причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Три формы записи комплексных чисел

1. ***Алгебраическая форма*** записи комплексного числа

$$z = x + iy.$$

2. ***Тригонометрическая форма*** записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r = |z|, \ \ \varphi = \arg z)$$

получается, если в алгебраической форме перейти к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi$.

3. ***Показательная форма*** записи комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} \quad (r = |z|, \varphi = \arg z)$$

получается из тригонометрической формы с помощью ***формулы Эйлера***: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

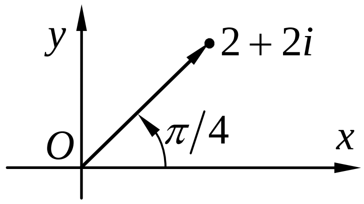
ПРИМЕР 1. Записать в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

а). $z_1 = 2 + 2i$; б). $z_2 = \sqrt{3} - i$; в). $z_3 = -3$; г). $z_4 = -3 - 2i$.

Решение. а). Для комплексного числа $z_1 = 2 + 2i$ имеем:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (x > 0).$$



Следовательно,

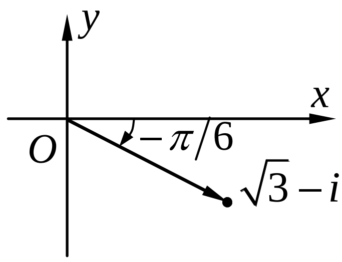
$$z_1 = \underbrace{2 + 2i}_{\substack{\textit{алгебр.}\\ \textit{форма}}} = \underbrace{2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}_{\substack{\textit{тригонометрическая}\\ \textit{форма}}} = \underbrace{2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\substack{\textit{показат.}\\ \textit{форма}}}.$$

Заметим, что $\operatorname{Arg} z_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

б). Для $z_2 = \sqrt{3} - i$ имеем:

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \quad (x > 0),$$



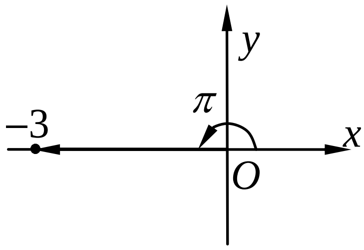
$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

в). Для числа $z_3 = -3$ получаем:

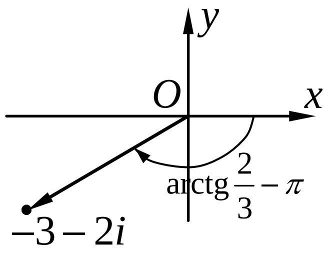
$$|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3,$$

$$\arg z_3 = \pi + \operatorname{arctg} 0 = \pi \quad (x < 0, y = 0),$$

$$z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{i\pi}.$$



г). Для $z_4 = -3 - 2i$ имеем:



$$|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13},$$

$$\arg z_4 = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{-2}{-3} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi,$$

$$z_4 = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi\right)\right) = \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi\right)}. \blacksquare$$

Действия над комплексными числами

Сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, заданных в алгебраической форме, определяются следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Заметим, что

1. $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, где $z = x + iy$;

2. $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, то есть $|z_1 - z_2|$ является расстоянием между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

ПРИМЕР 2. Даны комплексные числа $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 + 5i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

Решение. Используя формулы для суммы и разности, имеем:

$$(2 - 3i) + (-4 + 5i) = (2 + (-4)) + i(-3 + 5) = -2 + 2i;$$

$$(2 - 3i) - (-4 + 5i) = (2 - (-4)) + i(-3 - 5) = 6 - 8i.$$

Перемножая двучлены $(2-3i)$ и $(-4+5i)$, получаем

$$(2-3i)(-4+5i) = 2\cdot(-4) + 2\cdot 5i - 3i\cdot(-4) - 3i\cdot 5i =$$
$$= -8 + 10i + 12i - 15i^2 = \left\langle i^2 = -1 \right\rangle = -8 + 15 + 22i = 7 + 22i.$$

И, наконец, для нахождения частного $\dfrac{2-3i}{-4+5i}$ умножим числитель и знаменатель дроби на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{2-3i}{-4+5i} = \frac{(2-3i)\cdot(-4-5i)}{(-4+5i)\cdot(-4-5i)} = \frac{-8-15-10i+12i}{16+25} = -\frac{23}{41} + i\,\frac{2}{41}.\blacksquare$$

Для комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}, \;\; z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2},$$

имеет место формула

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Заметим, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на любое конечное число множителей, то есть справедлива формула для возведения комплексного числа в натуральную степень

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi},$$

в частности, имеет место ***формула Муавра***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Для частного чисел $z_1,\; z_2\; (z_2 \neq 0)$ имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

то есть при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

ПРИМЕР 3. Вычислить: а). $(1-i\sqrt{3})^{90}$; б). $(1+i)^{45}$.

<u>*Решение.*</u> а). Запишем комплексное число $z=1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической или показательной форме

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Применяя формулу возведения в натуральную степень, получаем

$$(1-i\sqrt{3})^{90}=2^{90}e^{-i\frac{90\pi}{3}}=2^{90}e^{-i30\pi}=2^{90}(\cos 30\pi-i\sin 30\pi)=2^{90}.$$

б). Для числа $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ имеем

$$(1+i)^{45}=(\sqrt{2})^{45}\left(\cos\left(45\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(45\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^{22}\cdot\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2^{22}(1+i).\blacksquare$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Корень *n*-й степени из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

где $k=0,1,2,\ldots,n-1,\ \ \varphi=\arg z.$

Точки, соответствующие корням *n*-й степени из комплексного числа *z*, находятся в вершинах правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

ПРИМЕР 4. Найти все значения корней: а). $\sqrt[4]{-1}$; б). $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение. а). Запишем число $z=-1$ в тригонометрической или показательной форме: $-1=1\cdot(\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k))=e^{i(\pi+2\pi k)}$, тогда

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}},\quad k=0,1,2,3.$$

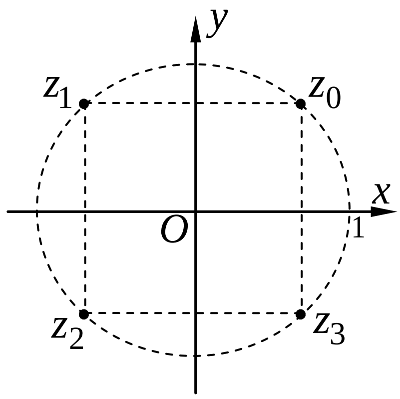
Подставляя $k=0,1,2,3$, получаем четыре различных значения $\sqrt[4]{-1}$:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Точки, соответствующие значениям $\sqrt[4]{-1}$, находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

б). Так как $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right)$, то

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Подставляя $k=0,1,2$, получаем:

$$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i),$$

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$$

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[3]{-1+i}$, находятся в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат.■

ПРИМЕР 5. Решить уравнение $z^2+2z+2=0$.

Решение. Корни квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$ находятся по формуле

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ \text{где } D=b^2-4ac.$$

Заметим, что $\sqrt{D}$ (при $D\neq 0$) принимает два различных значения, поэтому уравнение имеет два различных решения.

В нашем случае $D=-4$, следовательно,

$$z_{1,2}=\frac{-2+\sqrt{-4}}{2}=\left\langle \sqrt{-4}=\pm 2i \right\rangle=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i.■$$

ПРИМЕР 6. Решить уравнение $z^2+(1-3i)z-2-2i=0$.

Решение. Так как корни квадратного уравнения $z^2+pz+q=0$ находятся по формуле

$$z_{1,2}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

то в нашем случае имеем

$$z_{1,2}=-\frac{1-3i}{2}+\sqrt{\frac{(1-3i)^2}{4}-(-2-2i)}=\frac{3i-1+\sqrt{2i}}{2},$$

где

$$\sqrt{2i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2}\right),\ \ k=0,1.$$

Тогда

$$z_1=\frac{3i-1+1+i}{2}=2i,\quad z_2=\frac{3i-1-1-i}{2}=-1+i.■$$

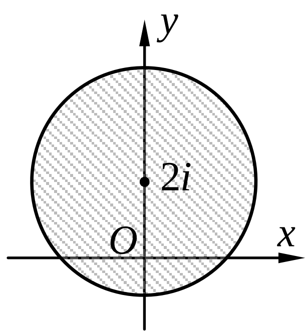
Замечание. Если в уравнении $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 = 0$ все коэффициенты являются действительными числами, и комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ является его корнем, то число $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ также является корнем этого уравнения (см. пример 5).

Множества точек на комплексной плоскости

ПРИМЕР 7. Какое множество точек на комплексной плоскости задается условием $|z - 2i| \le 3$?

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

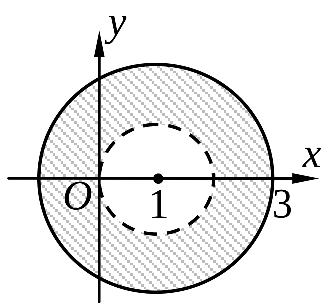
$$|z-2i| = |x + i(y-2)| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \le 3 \;\Rightarrow\; x^2 + (y-2)^2 \le 9.$$



Последнее неравенство задает круг радиуса 3 с центром в точке $z_0 = 2i$.

Этот же ответ можно получить, если воспользоваться тем, что $|z - 2i|$ равен расстоянию между точками z и $z_0 = 2i$.■

ПРИМЕР 8. Какое множество точек на комплексной плоскости задается условиями $1 < |z - 1| \le 2$?



Решение. Требуется найти все точки z комплексной плоскости, удовлетворяющие двум условиям: расстояние от z до точки $z_0 = 1$ должно быть строго больше единицы и меньше либо равно двум. Этим условиям удовлетворяют точки z, находящиеся в кольце, ограниченном окружностями радиуса 1 и 2 с центром в точке $z_0 = 1$, включая окружность радиуса 2.■

ПРИМЕР 9. Какая линия определяется условием $\operatorname{Im}(i+z)=|z|$?

Решение. Так как $z=x+iy$, то $\operatorname{Im}(i+z)=\operatorname{Im}(i+x+iy)=1+y$. Тогда имеем

$$y+1=\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; y^2+2y+1=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}.$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке (0;–0,5), ветви параболы направлены вверх.■

Задачи

1. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа: $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ z_2=-1-i\sqrt{3},\ z_3=4i,\ z_4=1-5i$.

2. Дано: $z_1=1+4i,\ z_2=-2+i$. Найти $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1z_2,\ z_1/z_2$.

3. Вычислить: а). $(1-i\sqrt{3})^{11}$; б) $(2+2i)^{20}$; в). $\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^{10}$.

4. Найти: а) $\sqrt[3]{-8i}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt{-\sqrt{3}+i}$.

5. Решить уравнения: а). $z^2+4z+5=0$; б) $z^2+(1-2i)z-3-i=0$.

6. Определить и нарисовать области, заданные неравенствами:

а). $-1<\operatorname{Re} z\le 2$; б). $-\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$; в). $|z-1-2i|>2$.

Ответы: 1. $z_1=2\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right)=2e^{3\pi i/4}$;

$z_2=2\left(\cos(-2\pi/3)+i\sin(-2\pi/3)\right)=2e^{-2\pi i/3}$;

$z_3=4\left(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)\right)=4e^{i\pi/2}$;

$z_4=\sqrt{26}\left(\cos(-\operatorname{arctg}5)+i\sin(-\operatorname{arctg}5)\right)=\sqrt{26}\cdot e^{i(-\operatorname{arctg}5)}$.

2. $-1+5i;\ 3+3i;\ -6-7i;\ 0{,}4-1{,}8i$.

3. а). $2^{10}(1+i\sqrt{3})$; **б).** -2^{30}; **в).** $\cos(10\cdot\operatorname{arctg}0{,}75)+i\sin(10\cdot\operatorname{arctg}0{,}75)$.

4. а). $2i;\ \pm\sqrt{3}-i$; **б).** $\pm 2;\ \pm 2i$; **в).** $\pm\sqrt{2}\left(\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12)\right)$.

5. а). $-2\pm i$; **б).** $1+i;\ -2+i$.

Домашнее задание

Теоретические упражнения

1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

2. Показать, что $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

3. Используя формулу Муавра, выразить $\sin 3\varphi$, $\cos 4\varphi$ через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

4. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z, если это число умножить на: а). 3; б). i; в) $-2i$?

Задачи

1.1. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

а). $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б). $z_2 = -\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$; в). $z_3 = -2 - 3i$;

г). $z_4 = 3\sqrt{3} + 3i$; д). $z_5 = -5i$; е). $z_6 = -7$; ж). $z_7 = 1 - 2i$.

1.2. Дано: $z_1 = -3 - i$, $z_2 = 2 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

1.3. Вычислить: а). $\dfrac{2-i}{3i} + (1-i)^2$; б). $(1-2i)^3 - \dfrac{4i}{1+i}$; в). $i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.

1.4. Найти расстояние между точками: $z_1 = 2 - 5i$ и $z_2 = 3i$.

1.5. Вычислить: а). $(-\sqrt{3} + 3i)^{14}$; б) $(-1-i)^{25}$; в). $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}$.

1.6. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{-4i}$; в). $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; г). $\sqrt[3]{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

1.7. Решить уравнения:

а). $z^2 - 4z + 8 = 0$; б). $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$; в). $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$.

1.8. На комплексной плоскости нарисовать области, заданные неравенствами:

а). $|z + i| > 1$; б). $1 < |z + 3i| < 3$; в). $-2 \le \operatorname{Im} z < 3$; г). $|z| - \operatorname{Re} z \le 0$.

2. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Основные понятия

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n ,$$

называется ***сходящимся***, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ имеет конечный предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. При этом число S называется ***суммой ряда***. Если конечного предела нет, то ряд называется ***расходящимся***.

Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется ***условно сходящимся***.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Замечание. Из необходимого признака следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится.

Достаточные признаки сходимости

1°. Признак сравнения рядов. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ для всех $n > N_0$ удовлетворяют условию $|z_n| \le b_n$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно. Если $0 < c_n \le |z_n|$ для всех $n > N_1$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ не сходится абсолютно.

2°. Предельный признак сравнения. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно, и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_n}{b_n}\right| = q < +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ также сходится абсолютно.

Замечание 1. Если члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ действительные положительные числа и $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Замечание 2. При использовании указанных выше признаков сравнения полезны следующие ряды:

а). ***геометрический ряд***, составленный из членов геометрической прогрессии,

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = a\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \begin{cases} \text{сходится при } |q| < 1 \text{ и } S = \dfrac{a}{1-q}, \\ \text{расходится при } |q| \ge 1; \end{cases}$$

б). ***ряд Дирихле*** (при $p = 1$ ряд называется ***гармоническим***)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \le 1. \end{cases}$$

3°. Признак Даламбера. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = q,$$

то при $0 \le q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится, а при $q = 1$ требуется дополнительное исследование.

4°. Радикальный признак Коши. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q,$$

то при $0 \le q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится, а при $q = 1$ требуется дополнительное исследование.

5°. Интегральный признак Коши. Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x \ge 1$, и пусть $f(n) = |z_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ и несобственный интеграл $\int\limits_{a(a\ge 1)}^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n - i}$.

<u>*Решение.*</u> Преобразуем данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+i}{4n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2+1} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}.$$

Так как первый из рядов расходится по признаку сравнения с гармоническим, то данный ряд расходится.■

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

Решение. Так как $\left|(e-i)^n\right|=\left(\sqrt{e^2+1}\right)^n$, то по признаку **3°**:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!\cdot\left(\sqrt{e^2+1}\right)^n}{(n+1)!\cdot\left(\sqrt{e^2+1}\right)^{n+1}\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\sqrt{e^2+1}}=\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.■

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{3^n}$.

Решение. По определению (см. стр. 20) $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}+e^n}{2\cdot 3^n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3e)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n\right).$$

Так как оба ряда сходятся (замечание 2), то данный ряд сходится.■

Задачи

1. Исследовать ряды на сходимость:

а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^n\sqrt{n+3}}{7^n}$; б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{2^n}$; в). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$.

Ответы: 1. а). сходится абсолютно; **б).** расходится; **в).** сходится абсолютно.

Домашнее задание

2.1. Исследовать ряды на сходимость:

а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-i}$; б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi}}{n\sqrt{n}}$; в). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot n}{2^n}$; г). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in^2)}{5^{n^2}}$.

3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Если каждой точке z из некоторого множества D ($D \subset \mathbb{C}$) поставлено в соответствие одно или несколько комплексных значений w, то говорят, что в D определена (однозначная или многозначная) ***функция комплексного переменного*** $w = f(z)$. Множество D называется ***областью определения*** этой функции.

Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительные функции действительных переменных x и y. Функция $u(x, y)$ называется ***действительной частью*** $f(z)$, а функция $v(x, y)$ – ***мнимой***. Обозначения: $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$.

ПРИМЕР 1. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2 + \mathrm{Im}\, z$.

Решение. Так как $z = x + iy$, то

$$f(z) = (x + iy)^2 + y = x^2 + i2xy - y^2 + y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) = x^2 - y^2 + y, \;\; v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z) = 2xy. \blacksquare$$

Основные элементарные функции

1. *Дробно-рациональная функция*

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0},$$

в частности, дробно-рациональной функцией является многочлен

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0.$$

2. ***Показательная функция***

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Показательная функция является периодической с периодом $2\pi i$, то есть

$$e^{z+2\pi ki}=e^z \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Для показательной функции справедливы соотношения:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2}=e^{z_1}:e^{z_2}.$$

3. ***Тригонометрические функции***:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Заметим, что $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены в комплексной плоскости. Например, $\cos 8i=\dfrac{e^{-8}+e^{8}}{2}>1400$.

4. ***Гиперболические функции***

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1, \qquad \operatorname{ch} 2z=\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z,$$

$$\operatorname{sh} 2z=2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2, \quad \operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z \quad \text{и т.д.}$$

Кроме того тригонометрические, гиперболические и показательная функции связаны соотношениями:

$$\sin z=-i\operatorname{sh} iz, \qquad \operatorname{sh} z=-i\sin iz, \qquad \cos z=\operatorname{ch} iz,$$

$$\operatorname{ch} z=\cos iz, \qquad \operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz, \qquad \operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z=i\operatorname{cth} iz, \qquad \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz, \qquad \operatorname{sh} z+\operatorname{ch} z=e^z.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить $\cos(2-3i)$ (записать в алгебраической форме).

<u>*Решение.*</u> Используя определения $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ и формулу Эйлера, имеем

$$\cos(2-3i)=\frac{1}{2}\left(e^{i(2-3i)}+e^{-i(2-3i)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{3+2i}+e^{-3-2i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{3}e^{2i}+e^{-3}e^{-2i}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{3}(\cos 2+i\sin 2)+e^{-3}(\cos 2-i\sin 2)\right)=$$

$$=\cos 2\cdot\frac{e^{3}+e^{-3}}{2}+i\sin 2\cdot\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}=\cos 2\operatorname{ch}3+i\sin 2\operatorname{sh}3\,.$$ ■

5. ***Логарифмическая функция***

$$f(z)=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)\,,$$

где $z\neq 0,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесконечно много значений. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется значение, которое получается при $k=0$, и обозначается $\ln z$:

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\quad\Rightarrow\quad \operatorname{Ln} z=\ln z+i2\pi k\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)\,.$$

Справедливы соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2,\quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2\,.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить а). $\operatorname{Ln}(1-i)$; б). $\ln(-8)$.

<u>*Решение.*</u> а). Так как $|1-i|=\sqrt{2},\ \ \arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{Ln}(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right),\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

б). Так как $|-8|=8,\ \ \arg(-8)=\pi$, то

$$\ln(-8)=\ln 8+i\pi\ \text{(это главное значение } \operatorname{Ln}(-8)\text{)}.$$ ■

6. ***Общая степенная функция***

$$f(z)=z^a=e^{a\,\mathrm{Ln}\,z},\quad \text{где } a=\alpha+i\beta$$

имеет бесконечно много значений; главное значение: $z^a=e^{a\ln z}$.

7. ***Общая показательная функция***

$$f(z)=a^z=e^{z\,\mathrm{Ln}\,a},\ \text{где } a=\alpha+i\beta\neq 0,$$

также имеет бесконечно много значений; главное значение: $a^z=e^{z\ln a}$.

ПРИМЕР 4. Вычислить $(1+i)^{2-2i}$.

<u>*Решение.*</u> Так как $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\pi/4$, то

$$(1+i)^{2-2i}=e^{(2-2i)\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{(2-2i)(\ln\sqrt{2}+i(\pi/4+2\pi k))}=$$

$$=2\cdot e^{(\pi/2+4\pi k)+i(\pi/2+4\pi k-\ln 2)},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\blacksquare$$

8. ***Обратные тригонометрические функции***:

$$\mathrm{Arccos}\,z=-i\,\mathrm{Ln}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right),\qquad \mathrm{Arcsin}\,z=-i\,\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\,z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\quad(z\neq\pm i),\quad \mathrm{Arcctg}\,z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i}\quad(z\neq\pm i).$$

9. ***Обратные гиперболические функции***:

$$\mathrm{Arch}\,z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\qquad \mathrm{Arsh}\,z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\mathrm{Arth}\,z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}\quad(z\neq\pm1),\quad \mathrm{Arcth}\,z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}\quad(z\neq\pm1).$$

ПРИМЕР 5. Записать в алгебраической форме $\mathrm{Arcsin}\,i$.

<u>*Решение.*</u> Подставляя $z=i$ в формулу для $\mathrm{Arcsin}\,z$, имеем

$$\mathrm{Arcsin}\,i=-i\,\mathrm{Ln}\left(i^2+\sqrt{1-i^2}\right)=-i\,\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{2}),$$

откуда для различных значений $\sqrt{2}$ получаем

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2}) = -i(\ln(\sqrt{2}-1) + i2\pi k) = 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1),$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\operatorname{Ln}(-1-\sqrt{2}) = -i(\ln(\sqrt{2}+1) + i(\pi + 2\pi k)) =$$

$$= (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1) \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).\blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Для $f(z) = \operatorname{ch}\bar{z}$ найти действительную и мнимую части.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $\bar{z} = x - iy$. Следовательно,

$$\operatorname{ch}\bar{z} = \operatorname{ch}(x - iy) = \frac{1}{2}\left(e^{x-iy} + e^{-(x-iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{-iy} + e^{-x}e^{iy}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x}(\cos y - i\sin y) + e^{-x}(\cos y + i\sin y)\right) =$$

$$= \cos y \cdot \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} - i\sin y \cdot \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \cos y \cdot \operatorname{ch} x - i\sin y \cdot \operatorname{sh} x.$$

Таким образом,

$$u(x,y) = \cos y \cdot \operatorname{ch} x, \ \ v(x,y) = -\sin y \cdot \operatorname{sh} x.\blacksquare$$

Задачи

1. Вычислить:

а). e^{2+5i}; б). $\cos 3i$; в). $\operatorname{ch}(3+4i)$;

г). $\sin(1-i)$; д). $\operatorname{th}\pi i$; е). $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)$;

ж). $\operatorname{Ln} e$; з). $\operatorname{Ln}(-4i)$; и). 2^{i};

к). $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-5i}$; л). i^{2-i}; м). $\operatorname{Arctg} 2i$.

2. Для данных функций найти действительную и мнимую части:

а). $f(z) = \bar{z}^{2} - z + i$; б). $f(z) = e^{\bar{z}}$;

в). $f(z) = \cos(z+1)$; г). $f(z) = \frac{1}{z-i}$.

Ответы: 1. а). $e^2(\cos 5 + i\sin 5)$; **б).** $\operatorname{ch} 3$; **в).** $\operatorname{ch} 3\cos 4 + i\operatorname{sh} 3\sin 4$;
г). $\operatorname{ch} 1\sin 1 - i\operatorname{sh} 1\cos 1$; **д).** 0; **е).** $\ln 2 + i(-\pi/6 + 2\pi k)$; **ж).** $1 + 2\pi k i$;
з). $\ln 4 + i(-\pi/2 + 2\pi k)$; **и).** $e^{-2\pi k}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$; **к).** $e^{5\pi/4 + 10\pi k}$;
л). $-e^{\pi/2 + 2\pi k}$; **м).** $\dfrac{\pi}{2} + \pi k + i\dfrac{\ln 3}{2}$.

2. а). $u = x^2 - y^2 - x,\ \ v = -2xy - y + 1$; **б).** $u = e^x\cos y,\ \ v = -e^x\sin y$;
в). $u = \cos(x+1)\operatorname{ch} y,\ \ v = -\sin(x+1)\operatorname{sh} y$;
г). $u = \dfrac{x}{x^2 + (y-1)^2},\ \ v = \dfrac{1-y}{x^2 + (y-1)^2}$.

Домашнее задание

3.1. Вычислить значение функции $f(z)$ в указанной точке:

а). $f(z) = z^2 + 3\overline{z} - 2i,\quad z_0 = 1 - 3i$;

б). $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1},\quad z_0 = -2 + i$;

в). $f(z) = e^{\overline{z}},\quad z_0 = \ln 4 - 15\pi i$.

3.2. Вычислить:

а). e^{-3+2i}; б). $\cos(3+2i)$; в). $\operatorname{sh}(1 + i\pi/4)$;
г). $\operatorname{ctg}(\pi i)$; д). $\operatorname{Ln}(-2)$; е). $\operatorname{Ln}(5i)$;
ж). $\operatorname{Ln} 3$; з). $\operatorname{Ln}(-2+2i)$; и). $\operatorname{Ln}(2-3i)$;
к). 10^{3-i}; л). $(-1 + i\sqrt{3})^{4i}$ м). $\operatorname{Arccos} i$.

3.3. Для данных функций найти действительную и мнимую части:

а). $f(z) = z^3 + iz + 3$; б). $f(z) = \sin\overline{z}$;

в). $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}(\overline{z}^2)$; г). $f(z) = e^{z^2}$;

д). $f(z) = \dfrac{z+1}{z-i}$; е). $f(z) = z|z+1|$.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0.

Функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z_0, если существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

который называется ***производной*** функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Функция $f(z)$ называется ***аналитической в точке*** z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0, а также в каждой точке некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** *D*, если она дифференцируема в каждой точке области *D*.

Точка, в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется ***особой точкой*** функции $f(z)$.

Условия Коши-Римана

Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ имела производную в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x,y) существовали и были непрерывны $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и выполнялись ***условия Коши-Римана***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для аналитической функции $f(z)$ справедливо

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для функций комплексного переменного имеют место правила дифференцирования, аналогичные правилам дифференцирования функций действительного переменного.

ПРИМЕР 1. Показать, что функция $f(z)=e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости. Найти ее производную.

Решение. Так как $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, то

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\forall(x,y).$$

Так условия Коши-Римана выполняются во всей плоскости, и функции u и v как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (x,y), то функция $f(z)=e^z$ является аналитической во все комплексной плоскости, и

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.\blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти область аналитичности функции $f(z)=\overline{z}$.

Решение. Так как $\overline{z}=x-iy$, то $u(x,y)=x,\ v(x,y)=-y$. Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Первое из условий Коши-Римана не выполняется ни в одной точке комплексной плоскости, следовательно, функция $f(z)=\overline{z}$ – нигде не дифференцируема и нигде не аналитична.■

ПРИМЕР 3. Найти область аналитичности функции $f(z)=z^2+iz$ и вычислить производную, если это возможно.

<u>*Решение.*</u> Так как $f(z)=z^2+iz=x^2-y^2-y+i(2xy+x)$, то

$$u(x,y)=x^2-y^2-y,\quad v(x,y)=2xy+x.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y-1, & & \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ & & \Rightarrow & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+1, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x & & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{matrix}$$

Условия Коши-Римана выполняются в любой точке (x,y), и функции u и v как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (x,y), следовательно, функция $f(z)=z^2+iz$ является аналитической во все комплексной плоскости.

Найдем ее производную:

$$(z^2+iz)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i(2y+1)=2x+i2y+i=2z+i\,.■$$

Восстановление аналитической функции

Функция $\varphi(x,y)$ называется ***гармонической*** в области D, если она в этой области имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Справедливо следующее утверждение:

Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в области D, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются гармоническими в D. Обратно, если $u(x,y)$

и $v(x,y)$ – гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, то $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической в D.

Если $u(x,y)$ $(v(x,y))$ – гармоническая функция в области D, то существует аналитическая функция $f(z)$, для которой функция $u(x,y)$ $(v(x,y))$ является действительной (мнимой) частью.

ПРИМЕР 4. Может ли функция $u=x^2-y^2+2xy$, быть действительно частью некоторой аналитической функции $f(z)=u+iv$? Если да, то восстановить эту функцию.

<u>*Решение.*</u> Проверим, является ли функция $u(x,y)$ гармонической. Так как

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2y, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0,$$

то функция $u(x,y)$ является гармонической и может быть действительной частью аналитической функции.

Найдем $v(x,y)$. Применяя первое условие Коши-Римана, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y \quad\Rightarrow\quad v=\int(2x+2y)dy=2xy+y^2+C(x),$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\underline{2y+C'(x)}.$$

Применяя второе условие Коши-Римана, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{2y-2x} \quad\Rightarrow\quad C'(x)=-2x,$$

то есть $C(x)=-x^2+C$ $(C\in\mathbb{R})$ и мнимая часть имеет вид

$$v(x,y)=2xy+y^2-x^2+C.$$

Окончательно имеем

$$f(z)=u+iv=x^2-y^2+2xy+i(2xy+y^2-x^2+C)=$$
$$=\underbrace{x^2+i2xy-y^2}_{(x+iy)^2}-i(\underbrace{x^2+i2xy-y^2}_{(x+iy)^2})+iC=(1-i)z^2+iC.\blacksquare$$

Замечание. Для определения константы C необходимо задать дополнительное условие вида: $f(z_0)=c_0$.

ПРИМЕР 5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=x^2+4x-y^2$, $f(0)=1$.

Решение. Так как

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial v}{\partial x}=2x+4, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2-2=0,$$

то функция $v(x,y)$ является гармонической и, следовательно, может быть мнимой частью аналитической функции.

Чтобы найти действительную часть $u(x,y)$, воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-2y \quad \Rightarrow \quad u=\int(-2y)dx=-2xy+C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\underline{-2x-4} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\underline{-2x+C'(y)},$$

откуда $C'(y)=-4$, то есть $C(y)=-4y+C$ $(C\in\mathbb{R})$ и $u=-2xy-4y+C$.

Следовательно,

$$f(z)=u+iv=-2xy-4y+C+i(x^2+4x-y^2)=$$
$$=i(x^2+i2xy-y^2)+4i(x+iy)+C=iz^2+4iz+C.$$

По условию $f(0)=1$. Подставляя $z=0$, получаем $C=1$, то есть

$$f(z)=iz^2+4iz+1.\blacksquare$$

Задачи

1. Определить область аналитичности функции и найти производную, если она существует:

а). $f(z) = z^2\overline{z}$; б). $f(z) = e^{3z}$; в). $f(z) = z\operatorname{Re} z$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

а). $u = e^{-y}\cos x - x$; б). $v = 3x + 2xy, \quad f(-i) = 2$.

Ответы: 2. а). $f(z) = e^{iz} - z + iC (C \in \mathbb{R})$; **б).** $f(z) = z^2 + 3iz$.

Домашнее задание

Теоретические упражнения

1. Может ли функция, аналитическая в области *D*, быть суммой (произведением) двух функций, не аналитических в этой области?
2. Показать, что если функция $f(z) = u + iv$ – аналитическая в области *D*, то в этой области выполняется равенство $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$.
3. Доказать, что не существует аналитической функции, для которой функция $u = x^2 - y$ являлась бы действительной частью.

Задачи

4.1. Для следующих функций определить область аналитичности. Найти производную, если она существует:

а). $f(z) = |z|\operatorname{Im} z$; б). $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$; в). $f(z) = e^{\overline{z}}$;

г). $f(z) = \operatorname{ch} z$; д). $f(z) = \sin(iz)$; е). $f(z) = z^2 - 3z + 2i$.

4.2. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

а). $v = x + 2, \quad f(-2) = 3$; б). $u = x^3 - 3xy^2 + 2$;

в). $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0$.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть однозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и непрерывна в области *D*, а *L* – ориентированная кусочно-гладкая кривая, лежащая в *D*. Вычисление интеграла от функции $f(z)$ по кривой *L* сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций действительных переменных *x* и *y*

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u(x, y) + iv(x, y))d(x + iy) =$$

$$= \int\limits_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Некоторые свойства интеграла

1°. $\int\limits_L (f_1(z) + f_2(z))dz = \int\limits_L f_1(z)dz + \int\limits_L f_2(z)dz$;

2°. $\int\limits_L cf(z)dz = c\int\limits_L f(z)dz$;

3°. $\int\limits_{L^+} f(z)dz = -\int\limits_{L^-} f(z)dz$

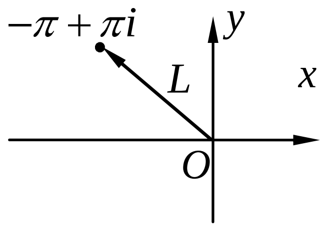
(здесь кривые L^+ и L^- имеют противоположную ориентацию);

4°. $\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz$.

Если кривая *L* задана параметрически $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, и $t = t_0$ соответствует началу кривой, а $t = t_1$ – ее концу, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt.$$

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^{\overline{z}}dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=-\pi+\pi i$;



Решение. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точки z_1 и z_2, имеют вид

$$x=t,\quad y=-t \quad \text{или} \quad z=t-it.$$

Тогда $\overline{z}=t+it,\ dz=(1-i)dt$ и $t_0=0,\ t_1=-\pi$. Следовательно,

$$\int\limits_L e^{\overline{z}}dz=\int\limits_0^{-\pi} e^{t+it}(1-i)dt=(1-i)\int\limits_0^{-\pi} e^{t+it}dt=\frac{(1-i)}{(1+i)}e^{t+it}\Big|_0^{-\pi}=(e^{-\pi}+1)i\,.\blacksquare$$

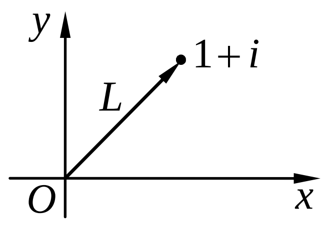
Замечание. Кривая L может быть задана функцией $y=y(x)$, где $a\le x\le b$. В этом случае переменную x можно считать параметром.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int\limits_L(\overline{z}+2i)dz$, где

а). L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$;

б). L – дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки z_1 и z_2.

Решение. а). Прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, имеет уравнение $y=x$, следовательно, $dy=dx$. Точке $z_1=0$ (начало кривой) соответствует $x=0$, а точке $z_2=1+i$ (конец) соответствует $x=1$.

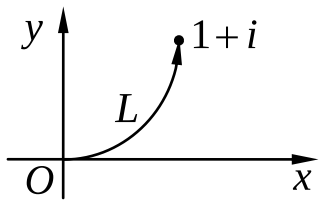


Следовательно,

$$\int\limits_L(\overline{z}+2i)dz=\int\limits_L(x+i(2-y))(dx+idy)=\int\limits_L xdx-(2-y)dy+$$

$$+i\int\limits_L(2-y)dx+xdy=\int\limits_0^1(x+x-2)dx+i\int\limits_0^1(2-x+x)dx=-1+2i.$$

б). Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$, пределы интегрирования те же, что и в предыдущем случае. Тогда



$$\int\limits_L (\bar{z} + 2i)dz = \int\limits_L (x + i(2 - y))(dx + idy) = \int\limits_L xdx - (2 - y)dy +$$

$$+i\int\limits_L (2 - y)dx + xdy = \int\limits_0^1 (x + (x^2 - 2)\cdot 2x)dx + i\int\limits_0^1 (2 - x^2 + x\cdot 2x)dx = -1 + \frac{7}{3}i.$$

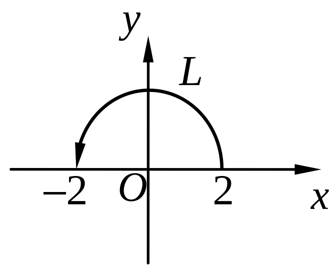
Заметим, что ответы в случаях а) и б) не совпали. Можно сделать вывод, что интеграл от неаналитической функции, вообще говоря, зависит от пути интегрирования.■

Замечание. Если кривая L является окружностью радиуса R с центром в точке z_0, то имеет смысл делать замену переменной $z = z_0 + Re^{i\varphi}$.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\bar{z}dz$, где L – верхняя половина окружности $|z| = 2$ от $z_1 = 2$ до $z_2 = -2$.

<u>*Решение.*</u> Для точек кривой L имеем

$$z = 2e^{i\varphi} \quad (0 \le \varphi \le \pi),$$



откуда получаем:

$$\bar{z} = 2e^{-i\varphi}, \quad z\bar{z} = |z|^2 = 4, \quad dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L z\bar{z}dz = \int\limits_0^\pi 4\cdot 2ie^{i\varphi}d\varphi = 8i\int\limits_0^\pi e^{i\varphi}d\varphi = 8e^{i\varphi}\Big|_0^\pi = -16.■$$

Интегрирование аналитических функций

Будем называть область D ($D \subset \mathbb{C}$) ***односвязной***, если она обладает следующим свойством: для любого контура, принадлежащего области D, часть плоскости, ограниченная этим контуром, является подмножеством D. Область, не являющаяся односвязной (область с «дырами»), называется ***многосвязной***.

Теорема Коши. Если $f(z)$ − однозначная и аналитическая в односвязной области D функция, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю:

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

(контур обходится так, чтобы область, ограниченная контуром, оставалась слева, это положительное направление обхода конура).

Следствие. Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, а точки z_1 и z_2 лежат в этой области, то интеграл $\int_L f(z)dz$ не зависит от формы кривой L, соединяющей точки z_1 и z_2, а зависит только от точек z_1 и z_2. Обозначение: $\int_L f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

Для аналитических функций справедлива ***формула Ньютона-Лейбница***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

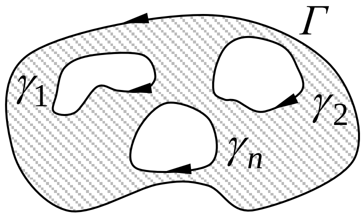
где $F(z)$ – первообразная для функции $f(z)$ в области D.

Справедлива также формула интегрирования по частям

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz = \left[f(z)g(z) \right] \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)g(z)dz.$$

Теорема Коши (для многосвязной области). Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична в многосвязной области D и на ее границе L, где L состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых ($L = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$), то

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$



Из свойства **4°** следует, что

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n^-} f(z)dz = 0,$$

откуда получаем

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz.$$

Знаки «+» и «–» в обозначениях контуров указывают на направление обхода.

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^z dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

<u>Решение.</u> Так как подынтегральная функция аналитична всюду в комплексной плоскости, то интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от точек $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$. Поскольку функция $F(z) = e^z$ является первообразной функции $f(z) = e^z$, применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{1+i} e^z dz = e^z \Big|_0^{1+i} = e^{1+i} - e^0 = e\cos 1 - 1 + ie\sin 1. \blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\int_0^i z\sin z dz$.

Решение. Под интегралом аналитические функции. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_0^i z\sin z dz = -z\cos z\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz = -i\cos i + \sin z\Big|_0^i =$$

$$= -i\cos i + \sin i = -i/e \,.\blacksquare$$

Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L, и на самом контуре, то справедлива ***интегральная формула Коши***

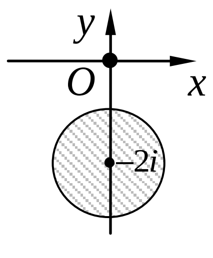
$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (z_0 \in D)}\,.$$

Контур L обходится так, чтобы область D оставалась слева.

ПРИМЕР 6. Вычислить интегралы:

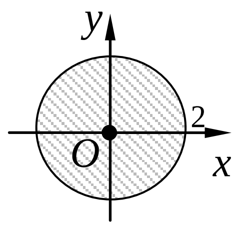
$$\text{а).}\ \oint_{|z+2i|=1} \frac{(z^2+3)e^z}{z} dz\,;\quad \text{б).}\ \oint_{|z|=2} \frac{(z^2+3)e^z}{z} dz\,.$$

Решение. а). Так как подынтегральная функция аналитична в области, ограниченной контуром $|z+2i|=1$, и на самом контуре, то по теореме Коши



$$\oint_{|z+2i|=1} \frac{(z^2+3)e^z}{z} dz = 0\,.$$

б). Функция $f(z) = (z^2+3)e^z$ − аналитическая в области, ограниченной контуром $|z|=2$, и на самом контуре, а точка $z_0 = 0$, в которой знаменатель



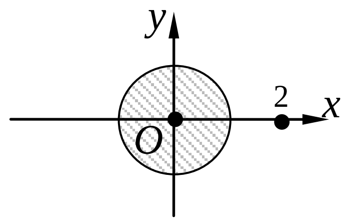
подынтегральной функции обращается в нуль, принадлежит указанной области. Применим интегральную формулу Коши:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=2}\frac{(z^2+3)e^z}{z-0}dz \quad\Rightarrow\quad \oint\limits_{|z|=2}\frac{(z^2+3)e^z}{z-0}dz=2\pi i f(0)=6\pi i\,.\blacksquare$$

ПРИМЕР 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а).}\ \oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz;\quad \text{б).}\ \oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz;\quad \text{в).}\ \oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz\,.$$

Решение. а). Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в двух точках: $z_1=0$ и $z_2=2$. В области, ограниченной контуром $|z|=1$, находится только точка $z_1=0$. Преобразуем подынтегральную функцию

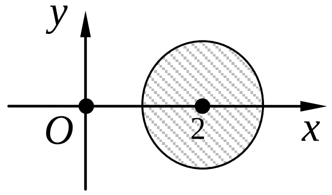


$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\frac{\cos z}{z-2}}{z}dz\,.$$

Так как функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-2}$ аналитична в указанной области и на ее границе, то применяя интегральную формулу Коши, получаем

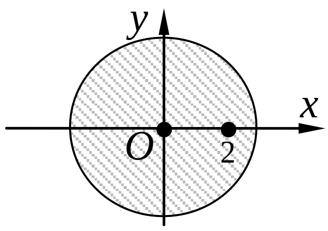
$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=2\pi i\left.\frac{\cos z}{z-2}\right|_{z=0}=-\pi i\,.$$

б). В области, ограниченной контуром $|z-2|=1$, находится точка $z_2=2$. Функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$ аналитична в этой области и на ее границе, поэтому применяя интегральную формулу Коши, имеем



$$\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\frac{\cos z}{z}}{z-2}dz=2\pi i\left.\frac{\cos z}{z}\right|_{z=2}=i\pi\cos 2\,.$$

в). Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=3$, находятся обе точки $z_1=0$ и $z_2=2$. Интегральную формулу Коши применять нельзя.



Первый способ. Представим дробь $\dfrac{1}{z^2-2z}$ в виде суммы простейших дробей:

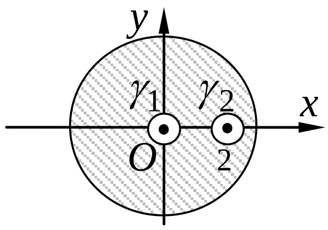
$$\frac{1}{z^2-2z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}.$$

Подставив полученное выражение в интеграл и применяя свойство **1°** и интегральную формулу Коши к каждому слагаемому, получаем

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z}dz+\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z-2}dz=$$

$$=-\pi i\cos z\big|_{z=0}+\pi i\cos z\big|_{z=2}=\pi i(\cos 2-1).$$

Второй способ. Воспользуемся теоремой Коши для многосвязной области. Для этого окружим точки $z_1=0$ и $z_2=2$ окружностями γ_1 и γ_2 малых радиусов так, чтобы эти окружности не пересекались и лежали внутри круга $|z|<3$. Функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2-2z}$ аналитична в многосвязной области *D*, ограниченной контурами $|z|=3$, γ_1 и γ_2, и на самих контурах, причем внешний контур проходится в положительном направлении, а внутренние – в отрицательном. По теореме Коши для многосвязной области имеем



$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz+\oint\limits_{\gamma_1^-}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz+\oint\limits_{\gamma_2^-}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=0,$$

следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz+\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz.$$

Применяя формулу Коши к слагаемым в правой части, получаем

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz=\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{\frac{\cos z}{z-2}}{z}dz+\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{\frac{\cos z}{z}}{z-2}dz=$$

$$=2\pi i\left.\frac{\cos z}{z-2}\right|_{z=0}+2\pi i\left.\frac{\cos z}{z}\right|_{z=2}=\pi i(\cos 2-1).\blacksquare$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в области D и на ее границе L, то она имеет производные всех порядков и справедлива формула

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad z_0\in D,\quad n=1,2,...}\qquad (*)$$

ПРИМЕР 8. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2(z+1)}$.

Решение. В область, ограниченную контуром $|z|=2$, попали две точки $z_1=-1$ и $z_2=1$.

Так как

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2},$$

то

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2(z+1)}=-\frac{1}{4}\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)}+\frac{1}{4}\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)}+\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2}.$$

Применяя к первым двум интегралам интегральную формулу Коши, а к третьему формулу $(*)$, получаем:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)}=2\pi i\operatorname{ch}1,\quad \oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)}=2\pi i\operatorname{ch}1,$$

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2}=2\pi i(\operatorname{ch} z)'\Big|_{z=1}=2\pi i\operatorname{sh}1.$$

Окончательно, имеем

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-1)^2(z+1)}=-\frac{1}{2}\pi i\operatorname{ch}1+\frac{1}{2}\pi i\operatorname{ch}1+\pi i\operatorname{sh}1=\pi i\operatorname{sh}1. \blacksquare$$

Задачи

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L (1+i-2\overline{z})dz$, где

а). L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+2i$;

б). L – дуга окружности $|z|=1,\ 0\le \arg z\le \pi/2$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \cos z dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=\pi/2$ и $z_2=\pi+i$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$.

4. Вычислить интегралы:

а). $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$; б). $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin iz}{z^2-4}dz$; в). $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{z}}{z^2-z}dz$.

г). $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^5}dz$; д). $\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$.

Ответы: 1. а). $-6+3i$; **б).** $-2-i\pi$. **2.** $-(1+i\operatorname{sh}1)$. **3.** $1-\cos1+i(\sin1-1)$. **4. а).** πe^{-1}; **б).** 0; **в).** $2\pi i(e-1)$; **г).** $\frac{\pi i}{12}$; **д).** $-\frac{3\pi i}{8}$.

Домашнее задание

5.1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$, где L – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0,\ \ z_2 = 2,\ \ z_3 = 2 + i$.

5.2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (i\bar{z} + z^2)dz$, где L – часть окружности $|z| = 2$, $\pi/2 \le \arg z \le \pi$.

5.3. Вычислить интеграл $\int\limits_L |z|\, dz$, где L – отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 3 + 2i$.

5.4. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z^2 - 3iz)dz$, где L – отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

5.5. Вычислить интегралы:

а). $\displaystyle\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2} dz$; б). $\displaystyle\int\limits_{i}^{1} z^2 \cos z dz$.

5.6. Вычислить интегралы:

а). $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz$; б). $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz$;

в). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z} dz$; г). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z} dz$;

д). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz$; е). $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z-1)^2} dz$.

6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

I. Функция $f(z)$, **<u>однозначная и аналитическая в круге</u>** $|z-z_0|<R$, может быть единственным образом разложена в этом круге в сходящийся ***ряд Тейлора***

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты c_n которого вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

где γ – произвольная окружность с центром в точке $z=z_0$, целиком лежащая внутри круга $|z-z_0|<R$.

Разложения элементарных функций в ряд Тейлора

1. $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{C};$

2. $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad z\in\mathbb{C};$

3. $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\qquad z\in\mathbb{C};$

4. $\ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1} z^n}{n},\qquad |z|<1;$

5. $(1+z)^\alpha=1+\dfrac{\alpha}{1!}z+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots=$

$$=1+\alpha z+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\qquad |z|<1.$$

В частности,

$$\textbf{6.}\ \ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad |z|<1;$$

$$\textbf{7.}\ \ \frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z|<1.$$

ПРИМЕР 1. Функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z-3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням z.

Решение. Представляя данную функция в виде суммы простейших дробей и используя разложения **6** и **7**, имеем

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+2z-3}=\frac{1}{2(z-1)}+\frac{1}{2(z+3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}_{|z|<1}+\frac{1}{6}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n}_{|z/3|<1\ \Rightarrow\ |z|<3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6\cdot 3^n}\right)z^n.$$

Полученный ряд сходится в круге $|z|<1$.■

ПРИМЕР 2. Функцию $f(z)=\ln(2+3z)$ разложить в ряд Тейлора по степеням $z-1$.

Решение. Преобразуя исходную функцию и используя разложение **4**, получим

$$\ln(2+3z)=\ln(5+3(z-1))=\ln\left(5\left(1+\frac{3(z-1)}{5}\right)\right)=\ln 5+\ln\left(1+\frac{3(z-1)}{5}\right)$$

$$=\ln 5+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{3(z-1)}{5}\right)^n=\ln 5+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n5^n}(z-1)^n.$$

Ряд сходится при условии $\left|\dfrac{3(z-1)}{5}\right|<1$, то есть $|z-1|<\dfrac{5}{3}$.■

II. Функция $f(z)$, **<u>однозначная и аналитическая в кольце</u>** $r<|z-z_0|<R$ $(0\le r<R\le+\infty)$, единственным образом разлагается в этом кольце в сходящийся ***ряд Лорана***

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

где γ – произвольная окружность с центром в точке $z=z_0$, целиком лежащая внутри кольца $r<|z-z_0|<R$.

При разложении в ряд Лорана используют стандартные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

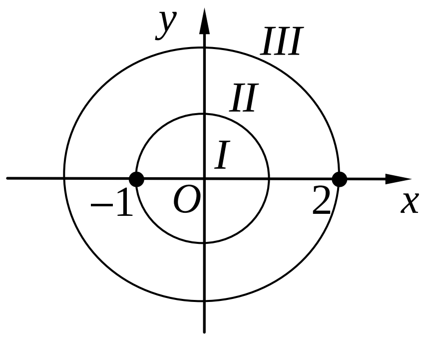
ПРИМЕР 3. Найти все разложения функции $f(z)=\dfrac{5-z}{z^2-z-2}$ по степеням z.

<u>*Решение.*</u> Функция $f(z)=\dfrac{5-z}{z^2-z-2}$ имеет две особые точки $z_1=-1$ и $z_2=2$. Следовательно, существуют круг и два кольца с центром в точке $z_0=0$, в которых данная функция является аналитической:

I: $|z|<1$;

II: $1<|z|<2$;

III: $2<|z|<+\infty$.



Для каждой из указанных областей найдем разложение функции $f(z)$ по степеням z. Для этого разложим данную дробь на простейшие дроби и используем разложения **6** и **7**.

В круге $|z|<1$ имеем следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{5-z}{z^2-z-2}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z+1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-2\cdot\frac{1}{1+z}=$$

$$=-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n}_{|z|<2}-2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n}_{|z|<1}=\underbrace{-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)z^n}_{|z|<1}.$$

В кольце $1<|z|<2$ функция раскладывается в ряд Лорана:

$$\frac{5-z}{z^2-z-2}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z+1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n}_{|z|<2}-\frac{2}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}}_{|1/z|<1\ \Rightarrow\ |z|>1}=\underbrace{-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}_{1<|z|<2}.$$

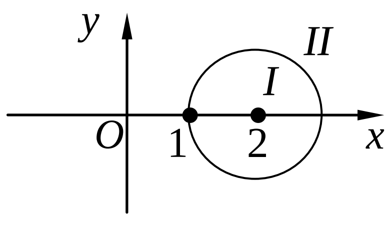
Для кольца $2<|z|<+\infty$ имеем разложение в ряд Лорана:

$$\frac{5-z}{z^2-z-2}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}}_{|z|>2}-\frac{2}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}}_{|z|>1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-2\cdot(-1)^n}{z^{n+1}}}_{|z|>2}.$$

Итак, получены три различных разложения одной и той же функции.■

ПРИМЕР 4. Функцию $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$.



__Решение.__ Данная функция имеет особые точки $z_1=1$ и $z_2=2$. Существуют два кольца с центром в точке $z_2=2$, в которых данная функция является аналитической:

$$I:\ 0<|z-2|<1;$$

$$II:\ 1<|z-2|<+\infty.$$

По условию задачи требуется найти разложение только в первом кольце. Представив функцию в виде суммы простейших дробей и используя разложения **6** и **7**, получаем

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=\underset{z\neq 2}{\frac{1}{z-2}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n}_{|z-2|<1}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ в окрестности точки $z=0$.

Решение. Данная функция является аналитической в кольце $0<|z|<+\infty$ и раскладывается в этом кольце в ряд Лорана. Используя разложение **2**, получаем

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-...=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2e^{1/z}$ в окрестности точки $z=0$.

Решение. Функция $f(z)$ является аналитической в кольце $0<|z|<+\infty$ и раскладывается в нем в ряд Лорана. Применим разложение **1**:

$$z^2e^{1/z}=z^2\left(1+\frac{1}{z\cdot 1!}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\frac{1}{z^4\cdot 4!}+...\right)=$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{z\cdot 3!}+\frac{1}{z^2\cdot 4!}+...=z^2+z+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n\cdot(n+2)!}.\blacksquare$$

Задачи

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ в ряд Тейлора по степеням z. Указать область сходимости.

2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{5-2z}$ в ряд Тейлора по степеням $z+1$. Указать область сходимости.

3. Разложить функцию $f(z)=e^z$ в ряд Тейлора по степеням $z+4$. Указать область сходимости.

4. Найти все разложения функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ по степеням z.

5. Функцию $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

6. Функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z+2}$ разложить в ряд Лорана в кольце $3<|z-1|<+\infty$.

Ответы: 1. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-1+2\dfrac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right)z^n, |z|<1$. **2.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n(z+1)^n}{7^{n+1}}, |z+1|<\dfrac{7}{2}$.

3. $e^{-4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(z+4)^n}{n!}, z\in\mathbb{C}$. **4.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, |z|<2$;

$-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}, 2<|z|<3$; $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{3^n-2^n}{z^{n+1}}, 3<|z|<+\infty$.

5. $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{(n+3)!}, 0<|z|<+\infty$. **6.** $1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+1}}$.

Домашнее задание

6.1. Следующие функции разложить в ряд Тейлора и указать область сходимости:

а). $f(z)=\dfrac{z}{z^2+3}$ по степеням z;

б). $f(z)=\ln(3-2z-z^2)$ по степеням z;

в). $f(z)=\cos z$ по степеням $z-\dfrac{\pi}{4}$;

г). $f(z)=\dfrac{z}{2z+1}$ по степеням $z-1$.

6.2. Найти все разложения функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2+2z-8}$

а). по степеням z;

б). по степеням z–2.

6.3. Разложить следующие функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$:

а). $f(z)=z^4\cos\dfrac{2}{z}$; б). $f(z)=\dfrac{z^5-2z^3+3}{z^4}$; в). $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

6.4. Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

а). $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $2<|z|<3$;

б). $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $0<|z-3|<1$;

в). $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $0<|z-i|<2$.

7. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Нули функции

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0.

Точка z_0 называется ***нулем k-го порядка функции*** $f(z)$, если выполняются условия:

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,\ \ldots,\quad f^{(k-1)}(z_0)=0,\quad f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Если $k=1$, то z_0 называется ***простым нулем***.

Для определения порядка нуля функции можно использовать следующие утверждения:

1. Точка z_0 − нуль *k*-го порядка функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, и $\varphi(z_0)\neq 0$.

2. Точка z_0 − нуль *k*-го порядка функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеем следующий вид

$$f(z)=c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots.=\sum_{n=k}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\ \ (c_k\neq 0).$$

3. Если точка z_0 является нулем *k*-го порядка функции $f_1(z)$ и нулем *l*-го порядка функции $f_2(z)$, то точка z_0 является нулем $(k+l)$-го порядка функции $f_1(z)\cdot f_2(z)$.

ПРИМЕР 1. Найти нули функции $f(z)=z^3\sin z$ и определить их порядки.

Решение. Решая уравнение $z^3\sin z=0$, получаем нули данной функции: $z_n=\pi n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Рассмотрим точку $z=0$. Так как разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z)=z^3\sin z=z^3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=z^4-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^8}{5!}-\ldots,$$

то точка $z=0$ является нулем 4-го порядка функции $f(z)$.

Рассмотрим точки $z_n=\pi n$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$. Так как

$$f(\pi n)=0,\quad f'(\pi n)=(3z^2\sin z+z^3\cos z)\big|_{z=\pi n}\neq 0,$$

то $z_n=\pi n$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ – простые нули функции $f(z)=z^3\sin z$.■

ПРИМЕР 2. Найти нули функции $f(z)=z^4+9z^2$ и определить их порядки.

Решение. Так как $f(z)=z^4+9z^2=z^2(z+3i)(z-3i)$, то точка $z=0$ является нулем 2-го порядка, а точки $z=\pm3i$ – простые нули функции $f(z)$.■

Изолированные особые точки (конечные)

Особая точка z_0 $(z_0\neq\infty)$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой нет других особых точек.

Изолированная особая точка z_0 называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Точка z_0 называется ***полюсом k-го порядка*** функции $f(z)$, если эта точка является нулем k-го порядка функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. Если $k=1$, то полюс называется ***простым***.

Изолированная особая точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки

Определить характер изолированной особой точки z_0 можно с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}},\quad 0<\left|z-z_0\right|<R.$$

z_0 – ***устранимая особая точка*** $\Leftrightarrow$ ряд Лорана не содержит главной части, то есть

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

z_0 – ***полюс k-го порядка*** $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, то есть

$$f(z)=\underbrace{\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}}\quad (c_{-k}\neq 0).$$

z_0 – ***существенно особая точка*** $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых, то есть бесконечно много отрицательных степеней $(z-z_0)$.

Признаки полюса

1°. Точка z_0 является полюсом *k*-го порядка функции $f(z)$, если $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0, и $\varphi(z_0)\neq 0$.

2°. Точка z_0 является полюсом *k*-го порядка функции $f(z)$, если существует $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]=C\neq 0$.

3°. Если $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, и точка z_0 является нулем *k*-го порядка функции $f_1(z)$ и нулем *l*-го порядка функции $f_2(z)$, то при $k\geq l$ точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, при $k<l$ точка z_0 – полюс порядка $l-k$.

ПРИМЕР 3. Найти конечные изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z-\pi)}$ и определить их тип.

Решение. Данная функция имеет две конечные изолированные особые точки: $z_1=\pi,\ z_2=0$.

Рассмотрим $z_1=\pi$:

$$\lim_{z\to\pi}\frac{\sin z}{z^2(z-\pi)}=-\lim_{z\to\pi}\frac{\sin(z-\pi)}{z^2(z-\pi)}=-\frac{1}{\pi^2}\quad\Rightarrow\quad z_1=\pi-\text{устр.ос.т.}$$

Рассмотрим $z_2=0$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2(z-\pi)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z(z-\pi)}=\infty\quad\Rightarrow\quad z_2=0-\text{полюс}.$$

Найдем порядок полюса, используя, например, признак **2°**:

$$\lim_{z\to 0}\left[f(z)\cdot z\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z-\pi)}=-\frac{1}{\pi}\neq 0\quad\Rightarrow\quad z_2=0-\text{простой полюс}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Найти конечные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^4}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z)$ имеет единственную конечную особую точку $z_0=0$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки ($0<|z|<+\infty$):

$$\frac{\cos z-1}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\ldots-1\right)=\underbrace{-\frac{1}{2z^2}}_{\text{гл. часть}}\underbrace{+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-\ldots}_{\text{правильная часть}},$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых. Так как $c_{-2}=-1/2\neq 0$, то точка $z_0=0$ − полюс второго порядка.■

ПРИМЕР 5. Найти конечные особые точки функции $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-2)^2(z+4)^3(z-1)^4}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z)$ имеет изолированные особые точки $z_1=2,\ z_2=-4,\ z_3=1$, которые являются ее полюсами, так как $\lim\limits_{z\to z_n} f(z)=\infty\ (n=1;2;3)$.

Чтобы определить порядок полюса $z_1=2$, используем, например, признак **1°**. Так как функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{\dfrac{z+1}{(z+4)^3(z-1)^4}}{(z-2)^2}=\frac{\varphi(z)}{(z-2)^2},$$

где $\varphi(z)$ − функция, аналитическая в точке $z_1=2$, и $\varphi(2)\neq 0$, то точка $z_1=2$ является полюсом второго порядка. Аналогично можно показать, что точка $z_2=-4$ − полюс третьего порядка, а точка $z_1=1$ − полюс четвертого порядка.■

ПРИМЕР 6. Найти конечные особые точки функции $f(z)=\sin\dfrac{1}{z+3}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z)$ имеет единственную конечную изолированную особую точку $z_0=-3$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\sin\frac{1}{z+3}=\underbrace{\frac{1}{z+3}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+3)^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+3)^5}-\ldots}_{\text{главная часть}},\quad 0<|z+3|<+\infty.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, то $z_0=-3$ − существенно особая точка.■

ПРИМЕР 7. Найти конечные особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ и определить их тип.

Решение. Функция $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ имеет бесконечно много особых точек:

$$z_n=\frac{\pi}{2}+\pi n\ \ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Так как $\lim\limits_{z\to z_n}\dfrac{1}{\cos z}=\infty$, то z_n − полюсы. Для определения их порядка рассмотрим функцию $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\cos z$. Для функции $\varphi(z)$ точки z_n являются простыми нулями, так как $\varphi(z_n)=0$ и $\varphi'(z_n)=-\sin(z_n)\neq0$. Следовательно, точки z_n являются простыми полюсами функции $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$.■

Задачи

1. Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$ определить тип особой точки $z_0=0$.

2. Для следующих функций найти все конечные особые точки и определить их тип:

а). $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{z^3}$; б). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5+2z^4+z^3}$;

в). $f(z)=\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$; г). $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$;

д). $f(z)=\dfrac{\cos z}{\pi z-2z^2}$; е). $f(z)=\dfrac{\sin(z^2-1)}{(z^2+1)(z-1)}$.

Ответы: 1. Полюс 3-го пор. **2. а).** $z_0=0$ − простой полюс; **б).** $z_1=0, z_2=-1$ − полюсы 2-го пор.; **в).** $z_0=0$ − сущ. ос. точка; **г).** $z_1=0$ − устр. ос. точка, $z_n=\pi n (n=\pm1,\pm2,...)$ − простые полюсы; **д).** $z_1=0$ − пр. полюс, $z_2=\pi/2$ − устр. ос. точка; **е).** $z_{1,2}=\pm i$ − пр. полюсы, $z_3=1$ − устр. ос. точка.

Домашнее задание

7.1. Для следующих функций найти все конечные особые точки и определить их тип:

а). $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2)^3z^4}$; б). $f(z)=\dfrac{\sin z-z}{z^3}$;

в). $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$; г). $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos z}$;

д). $f(z)=ze^{-1/z^2}$; е). $f(z)=\dfrac{z-2i}{(z^2+4)(z^2-1)}$;

ж). $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{(z^2-4\pi^2)z^3}$; з). $f(z)=\dfrac{8+4z^3-3z^5}{z^6}$.

8. ВЫЧЕТЫ

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 ($z_0 \neq \infty$) называется число

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz,$$

где γ – окружность с центром в точке z_0 малого радиуса, не содержащая внутри других особых точек функции $f(z)$.

Вычисление вычетов

1°. Из формулы для коэффициентов c_n ряда Лорана следует, что

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}},$$

где c_{-1} – коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0. То есть, если z_0 – ***устранимая особая точка***, то $\operatorname{res} f(z_0) = 0$.

2°. Если z_0 – ***простой полюс*** функции $f(z)$, то

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left[f(z)\cdot(z - z_0)\right]}.$$

3°. Если z_0 – ***простой полюс*** функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}.$$

4°. Если z_0 – ***полюс k-го порядка*** функции $f(z)$, то

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{k-1}\left[f(z)\cdot(z - z_0)^k\right]}{dz^{k-1}}}.$$

ПРИМЕР 1. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-z^2}$ в конечных особых точках.

<u>*Решение.*</u> Особые точки данной функции: $z_1=0,\ \ z_2=1.$

В точке $z_1=0$ имеем:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2(z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

следовательно, $z_1=0$ − устранимая особая точка и $\operatorname{res} f(0)=0$.

Точка $z_2=1$ − простой полюс, так как

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sin z^2}{z^2(z-1)}=\infty,$$

и в точке $z_2=1$ числитель дроби $\dfrac{\sin z^2}{z^2(z-1)}$ в нуль не обращается, а знаменатель имеет в этой точке нуль первого порядка. Тогда, используя, например, формулу **2°**, имеем

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}\left[f(z)\cdot(z-1)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z^2}{z^2}=\sin 1.\blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти вычеты функции $f(z)=z\sin\dfrac{1}{z^2}$ в конечных особых точках.

<u>*Решение.*</u> Единственной конечной особой точкой функции $f(z)$ является точка $z_0=0$. Лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$z\sin\frac{1}{z^2}=z\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^5}+\frac{1}{5!z^9}-\ldots,\ \ 0<|z|<+\infty.$$

Так как главная часть содержит бесконечно много слагаемых, то $z_0=0$ − существенно особая точка. Коэффициент при z^{-1} равен 1, следовательно, $\operatorname{res} f(0)=1.\blacksquare$

ПРИМЕР 3. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$ в конечных особых точках.

Решение. Особые точки данной функции: $z_1=1,\ \ z_2=-2$.

В точке $z_1=1$ имеем:

$$\lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}=\infty \text{ и } f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-1)^2},\ \ \varphi(z)=\frac{e^z}{z+2},\ \ \varphi(1)\neq0,$$

то есть $z_1=1$ − полюс 2-го порядка. Используя формулу **4°**, имеем

$$\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\left(f(z)\cdot(z-1)^2\right)'=\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z}{z+2}\right)'=\lim_{z\to1}\frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2}=\frac{2e}{9}.$$

В точке $z_2=-2$ имеем:

$$\lim_{z\to-2}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}=\infty \text{ и } f(z)=\frac{\varphi(z)}{z+2},\ \ \varphi(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2},\ \ \varphi(-2)\neq0,$$

то есть $z_2=-2$ − простой полюс. Используя формулу **2°**, имеем:

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to-2}\left(f(z)\cdot(z+2)\right)=\lim_{z\to-2}\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{1}{9e^2}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ в конечных особых точках.

Решение. Функция имеет две конечные особые точки $z_1=i,\ \ z_2=-i$, которые, очевидно, являются простыми полюсами.

Используя формулу **3°**, найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res} f(i)=\left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i}=-\frac{i}{2};$$

$$\operatorname{res} f(-i)=\left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=-i}=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=-i}=\frac{i}{2}.\ \blacksquare$$

Вычисление интегралов с помощью вычетов

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе L области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z - 1}{z^2 - z} dz$.

<u>*Решение.*</u> Так как функция $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 - z}$ аналитична всюду в круге $|z| \le 2$ кроме точек $z_1 = 0,\ \ z_2 = 1$, то по теореме Коши о вычетах

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} dz = 2\pi i(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(1)).$$

Для точки $z_1 = 0$ имеем:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z(z-1)} = -1 \ \Rightarrow \ z_1 = 0 - \text{устр.ос.т.} \ \Rightarrow \ \operatorname{res} f(0) = 0.$$

Точка $z_2 = 1$ − простой полюс функции $f(z)$, так как эта точка не является нулем для числителя дроби $\dfrac{e^z - 1}{z(z-1)}$ и является простым нулем для знаменателя. Тогда

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \to 1} \left[f(z) \cdot (z-1) \right] = \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{z} = e - 1.$$

Таким образом,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2 - z} dz = 2\pi i(e - 1). \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz$.

Решение. Из точек $z_n = \frac{1}{2} + n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых $\cos \pi z = 0$, только две $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ попадают в область, ограниченную контуром $|z| = 1$. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz = 2\pi i\left(\operatorname{res} f\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{res} f\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Точки $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ являются простыми полюсами (проверьте!), тогда используя формулу **3°**, имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{z\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\pi}, \quad \operatorname{res} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{z\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Окончательно

$$\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz = 0. \blacksquare$$

ПРИМЕР 7. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \left(z^3 \cos\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z}\right) dz$.

Решение. В области, ограниченной контуром $|z| = 1$, находится только одна особая точка $z_0 = 0$, поэтому по теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \left(z^3 \cos\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{res} f(0).$$

Так как

$$z^3 \cos\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} = z^3 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4!z^5} - \frac{1}{6!z^9} + \ldots - \frac{3}{z}, \quad 0 < |z| < +\infty,$$

то точка $z_0 = 0$ − существенно особая точка (главная часть ряда Лорана содержит бесконечного много слагаемых)

Так как $c_{-1} = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$, то $\operatorname{res} f(0) = -\frac{7}{2}$, откуда получаем

$$\oint\limits_{|z|=1} \left(z^3 \cos\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} \right) dz = -7\pi i. \blacksquare$$

ПРИМЕР 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2+1} dz$.

Решение. В область, ограниченную данным контуром попали две изолированные особые точки: $z_1 = 0$ − существенно особая точка и $z_2 = i$ − простой полюс (проверьте!). Тогда

$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2+1} dz = 2\pi i(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(i)).$$

Найдем вычет в полюсе:

$$\operatorname{res} f(i) = \left. \frac{\cos\frac{1}{z}}{(z^2+1)'} \right|_{z=i} = \left. \frac{\cos\frac{1}{z}}{2z} \right|_{z=i} = -i\frac{\operatorname{ch}1}{2}.$$

Для нахождения вычета в существенно особой точке $z_1 = 0$, вообще говоря, требуется лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности этой точки. Но в данном случае в силу четности функции $f(z)$, очевидно, что в лорановском разложении будут присутствовать только четные степени z и $\frac{1}{z}$, поэтому $c_{-1} = 0$. Таким образом,

$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2+1} dz = \pi \operatorname{ch}1. \blacksquare$$

Задачи

1. Найти вычеты данных функции в конечных особых точках:

а). $f(z)=\dfrac{e^{-z}-1+z}{z^5}$; б). $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$;

в). $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^3-z^2}$; г). $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{4z^2-\pi z}$.

2. Вычислить интегралы:

а). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z^2+2z^4}{z^5}dz$; б). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$;

в). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)^3(z+2)}$; г). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{\sin iz}{z^2+\pi^2}dz$.

Ответы: 1. а). $\operatorname{res} f(0)=1/24$; **б).** $\operatorname{res} f(-1)=-2/9$; $\operatorname{res} f(2)=2/9$;
в). $\operatorname{res} f(0)=0$; $\operatorname{res} f(1)=\cos 1-1$; **г).** $\operatorname{res} f(0)=0$; $\operatorname{res} f(\pi/4)=1/\pi$;
$\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=\dfrac{-2}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$. **2.а).** $3\pi i$; **б).** $2(1-e^{-1})\pi i$; **в).** 0; **г).** 0.

Домашнее задание

8.1. Вычислить интегралы:

а). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4}dz$; б). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^3}dz$;

в). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3(z+1)}dz$; г). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z-1-z}{z^3+z^2}dz$;

д). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}z^2\sin\frac{\pi}{z}dz$; е). $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{z}{(z-1)^2(z+1)}dz$;

ж). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz$; з). $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos\pi z}{2z^2-z}dz$.

9. БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННАЯ ТОЧКА

Под окрестностью бесконечно удаленной точки $z=\infty$ будем понимать внешность любого круга радиуса R с центром в начале координат, то есть $|z|>R$.

Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой нет других особых точек функции $f(z)$.

Изолированная особая точка $z=\infty$ называется

устранимой особой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$;

полюсом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;

существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует.

Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

Определить тип бесконечно удаленной точки $z=\infty$ можно с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}}_{\substack{\text{правильная}\\ \text{часть}}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}c_n z^n}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}},\quad R<|z|<+\infty.$$

$z=\infty$ − ***устранимая особая точка*** $\Leftrightarrow$ ряд Лорана не содержит главной части.

$z=\infty$ − ***полюс k-го порядка*** $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, то есть

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}}_{\substack{\text{правильная}\\ \text{часть}}}\underbrace{+c_1 z+\ldots+c_k z^k}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}},\quad c_k\neq 0.$$

$z=\infty$ − ***существенно особая точка*** $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых, то есть бесконечно много положительных степеней z.

Замечание. Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области $|z|>R$, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки. Выяснить характер бесконечно удаленной точки $z=\infty$ можно, сделав замену переменной $z=1/\xi$. Тогда функция

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

аналитична всюду в области $|\xi|<1/R$, кроме может быть точки $\xi=0$. Характер точки $\xi=0$ совпадает с характером бесконечно удаленной точки $z=\infty$.

ПРИМЕР 1. Для функции $f(z)=\dfrac{z^5-z+1}{z^2+4}$ определить характер бесконечно удаленной точки.

__*Решение.*__ Сделаем замену переменной $z=1/\xi$:

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\dfrac{1}{\xi^5}-\dfrac{1}{\xi}+1}{\dfrac{1}{\xi^2}+4}=\frac{1-\xi^4+\xi^5}{\xi^3+4\xi^5}=\frac{1-\xi^4+\xi^5}{\xi^3(1+4\xi^2)}.$$

Точка $\xi=0$ является полюсом третьего порядка функции $\varphi(\xi)$, так как точка $\xi=0$ является нулем третьего порядка знаменателя, а числитель в этой точке в нуль не обращается.

Следовательно, бесконечно удаленная точка $z=\infty$ также является полюсом третьего порядка функции $f(z)$.■

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной особой точке $z=\infty$ называется число

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^-} f(z)dz,$$

где γ^- − окружность достаточно большого радиуса, проходимая по часовой стрелке, чтобы окрестность точки $z=\infty$ оставалась слева, причем в этой окрестности не должно быть других особых точек.

Из определения вычета следует, что

$$\operatorname{res} f(\infty)=-c_{-1},$$

где c_{-1} − коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности $z=\infty$.

Замечание 1. Вычет функции в бесконечно удаленной устранимой особой точке может быть отличным от нуля.

Замечание 2. Известные разложения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ можно рассматривать как лорановские разложения в окрестности $z=\infty$, причем для указанных функций $z=\infty$ − существенно особая точка.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(z)=z^4 e^{\frac{1}{z}}$ определить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет.

<u>*Решение.*</u> Используя известное разложение для e^z, получаем ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z=\infty$

$$z^4 e^{\frac{1}{z}}=\underbrace{z^4+z^3+\frac{z^2}{2!}+\frac{z}{3!}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!z}+\frac{1}{6!z^2}+\ldots}_{\text{правильная часть}},\quad 0<|z|<+\infty.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых и старшая степень z равна 4, то $z=\infty$ − полюс 4-го порядка.

Найдем вычет в точке $z=\infty$:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z-4}$ во всех особых точках.

<u>*Решение.*</u> Функция $f(z)$ имеет всего две особые точки: $z_1=4,\ z_2=\infty$. Так как разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z_1=4$ имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{z-4},\ \ 0<|z-4|<+\infty,$$

то $z_1=4$ − простой полюс, и $\operatorname{res} f(4)=c_{-1}=1$.

Найдем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_2=\infty$

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}},\ \ 4<|z|<+\infty.$$

Так как разложение не содержит главной части, то точка $z_2=\infty$ является устранимой особой точкой, при этом $\operatorname{res} f(\infty)=-c_{-1}=-1.\blacksquare$

Справедливо следующее **утверждение**:

Если функция $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)+\operatorname{res} f(\infty)=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)=-\operatorname{res} f(\infty).$$

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^9}$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет девять изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_9$, и все они принадлежат области, ограниченной контуром $|z|=2$. Тогда

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^9} = 2\pi i \sum_{k=1}^{9} \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

Чтобы найти $\operatorname{res} f(\infty)$ разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки $|z|>1$

$$\frac{1}{1+z^9} = \frac{1}{z^9} \frac{1}{1+\frac{1}{z^9}} = \frac{1}{z^9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{9n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{9(n+1)}},$$

откуда следует, что $c_{-1}=0$, то есть $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^9} = 0$.■

Задачи

1. Определить характер точки $z=\infty$ и найти вычет в этой точке:

а). $f(z) = \frac{3z^4 - z^3 + 5z^2 + 2}{z^3}$; б). $f(z) = \cos\frac{\pi}{z}$;

в). $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$; г). $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$.

2. Используя вычет в бесконечности, вычислить интегралы:

а). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^3 - z^2} dz$; б). $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+1} dz$.

Ответы: 1. а). простой полюс, $\operatorname{res} f(\infty) = -5$; **б).** устранимая особая точка, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$; **в).** существенно особая точка, $\operatorname{res} f(\infty) = -1/24$; **г).** устранимая особая точка, $\operatorname{res} f(\infty) = -1$. **2. а).** 0; **б).** $-2\pi i$.

10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

1. Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

где $R(\cos x, \sin x)$ − рациональная функция $\cos x$ и $\sin x$.

Вводится комплексная переменная $z = e^{ix}$. При этом, когда x пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, переменная z проходит окружность $|z| = 1$ на комплексной плоскости против часовой стрелки.

Переходя к новой переменной, имеем:

$$dz = ie^{ix}dx = izdx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Полученный интеграл вычисляется с помощью вычетов.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}$.

Решение. Пусть $z = e^{ix}$, тогда $dx = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos x = \dfrac{z^2 + 1}{2z}$.

Подставляя выражения для $dx, \cos x$ в данный интеграл, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{i(3z^2 + 10z + 3)} = \frac{2}{3i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z+3)(z+1/3)} =$$

$$= \frac{2}{3i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \operatorname{res} f\left(-\frac{1}{3}\right),$$

так как в область, ограниченную контуром $|z| = 1$, попадает только одна точка $z = -1/3$, которая очевидно является простым полюсом функции $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z+1/3)}$. Следовательно,

$$\operatorname{res} f(-1/3) = \lim_{z \to -1/3} \frac{1}{z+3} = \frac{3}{8} \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x} = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

2. Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ − многочлены степени m и n, $Q_n(x) \neq 0$ и $n \geq m + 2$.

Справедлива следующая формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sigma,$$

где σ − сумма вычетов функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)},$$

для которой точки $z = \pm 2i$ и $z = \pm 3i$ являются простыми полюсами. Из них в верхней полуплоскости находятся точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3i$.

Найдем вычеты функции $f(z)$ в этих точках:

$$\operatorname{res} f(2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z^2+9)} = -\frac{i}{20};$$

$$\operatorname{res} f(3i) = \lim_{z \to 3i} \frac{1}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{i}{30}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} = 2\pi i\left(-\frac{i}{20} + \frac{i}{30}\right) = \frac{\pi}{30}. \blacksquare$$

Задачи

1. Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$; б). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$;

в). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$; г). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^4}$.

Ответы: 1. а). $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; **б).** $\dfrac{10\pi}{27}$; **в).** $\dfrac{\pi}{4a}$; **г).** $\dfrac{5\pi}{4^6}$.

Домашнее задание

10.1. Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$; б). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1-2a\sin x+a^2}$ $(0<a<1)$;

в). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$; г). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО СВОЙСТВА

Комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента называется ***оригиналом***, если

1. $f(t)=0$ при $t<0$;
2. на любом конечном отрезке $[0,t]$ функция $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем только 1-го рода;
3. функция $f(t)$ возрастает при $t\to+\infty$ не быстрее показательной функции, то есть существуют действительные числа $M>0$ и $s\geq 0$ такие, что

   $$|f(t)|<Me^{st} \text{ при } t>0.$$

Наименьшее число s_0, для которого выполняется последнее неравенство, называется ***показателем роста*** функции $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

причем в полуплоскости $\operatorname{Re} p>s_0$ интеграл сходится абсолютно, и функция $F(p)$ является аналитической.

Переход от функции $f(t)$ к функции $F(p)$ называется ***преобразованием Лапласа***. Обозначение: $f(t)\doteqdot F(p)$.

ПРИМЕР 1. Найти изображение функции Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Решение. Очевидно, что функция $\eta(t)$ является оригиналом, ее показатель роста $s_0=0$.

Найдем изображение функции Хевисайда по определению

$$\eta(t) \doteqdot F(p) = \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

(здесь $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0$, так как $\left| e^{-pt} \right| = e^{-t \operatorname{Re} p}$ и $\operatorname{Re} p > s_0 = 0$).■

ПРИМЕР 2. Найти изображение функции $f(t) = \eta(t) e^{at}$ $(a \in \mathbb{C})$.

Решение. Очевидно, что функция $f(t)$ является оригиналом, ее показатель роста $s_0 = \operatorname{Re} a$, тогда

$$\eta(t) e^{at} \doteqdot F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

(здесь $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(a-p)t} = 0$ при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$).■

Замечание. В дальнейшем для краткости будем опускать множитель $\eta(t)$, считая, что при $t < 0$ $f(t) = 0$, то есть

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}, \quad e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a}.$$

Свойства оригиналов и изображений

1°. ***Линейность.*** Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p), \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$\boxed{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \doteqdot C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) \ \ (C_1, C_2 \in \mathbb{C})}\,.$$

ПРИМЕР 3. Найти изображение оригинала $f(t) = 3 + 4e^{-2t}$.

Решение. Так как $1 \doteqdot \dfrac{1}{p}, \ e^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$, то по свойству **1°**

$$f(t) = 3 + 4e^{-2t} \doteqdot 3\frac{1}{p} + 4\frac{1}{p+2} = \frac{7p+6}{p^2+2p}.■$$

ПРИМЕР 4. Найти изображение оригинала $f(t) = \cos t$.

Решение. Так как $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, то по свойству **1°** имеем

$$\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \doteqdot \frac{1}{2}\frac{1}{p-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2+1}. \blacksquare$$

Точно так же можно показать, что

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}; \quad \operatorname{sh} t \doteqdot \frac{1}{p^2-1}; \quad \operatorname{ch} t \doteqdot \frac{p}{p^2-1}.$$

2°. *Теорема подобия.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\boxed{f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0)}.$$

ПРИМЕР 5. Найти изображение оригинала $f(t) = \cos at$.

Решение. Так как $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, то по свойству **2°** получаем

$$\cos at \doteqdot \frac{1}{a}\frac{p/a}{(p/a)^2+1} = \frac{p}{p^2+a^2}. \blacksquare$$

3°. *Теорема смещения.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого a

$$\boxed{e^{at} f(t) \doteqdot F(p-a)}.$$

ПРИМЕР 6. Найти изображение оригинала $f(t) = e^{5t}\cos 3t$.

Решение. Так как $\cos 3t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+9}$, то используя теорему смещения при $a = 5$, имеем

$$e^{5t}\cos 3t \doteqdot \frac{p-5}{(p-5)^2+9} = \frac{p-5}{p^2-10p+34}. \blacksquare$$

4°. ***Дифференцирование изображения.*** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\boxed{F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)}.$$

ПРИМЕР 7. Найти изображение оригинала $f(t) = t^3$.

Решение. Так как $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, то дифференцируя изображение три раза, имеем

$$\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{-1}{p^2} \risingdotseq -t; \quad \left(\frac{-1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3} \risingdotseq t^2; \quad \left(\frac{2}{p^3}\right)' = -\frac{6}{p^4} \risingdotseq -t^3 \quad \Rightarrow \quad t^3 \risingdotseq \frac{6}{p^4}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 8. Найти изображение функции $f(t) = t\sin t$.

Решение. Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то по свойству **4°** получаем

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{-2p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq -t\sin t \quad \Rightarrow \quad t\sin t \risingdotseq \frac{2p}{(p^2+1)^2}. \blacksquare$$

5°. ***Дифференцирование оригинала***

Если $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ... $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\boxed{\begin{aligned} & f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0); \\ & f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \\ & \ldots \\ & f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}}$$

6°. ***Интегрирование оригинала.*** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}}.$$

ПРИМЕР 9. Найти изображение оригинала $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{\tau}d\tau$.

Решение. Используя свойства **4°** и **6°**, имеем

$$te^t \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2}; \quad \int\limits_0^t \tau e^{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p(p-1)^2}.■$$

7°. *Интегрирование изображения.* Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то

$$\boxed{\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int\limits_p^{\infty}F(p)dp}.$$

ПРИМЕР 10. Найти изображение оригинала $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, то по свойству **7°** имеем

$$\frac{\sin t}{t}\doteqdot\int\limits_p^{\infty}\frac{dp}{p^2+1}=\operatorname{arctg} p\Big|_p^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.■$$

8°. *Теорема запаздывания.* Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то для любого $\tau>0$

$$\boxed{f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p),\ \ \tau>0}.$$

ПРИМЕР 11. Найти изображение оригинала

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t<0, t>2.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(t)$ может быть представлена в виде

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-2).$$

Используя свойства **1°** и **8°**, получаем

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-2)\doteqdot\frac{1}{p}-\frac{e^{-2p}}{p}.■$$

9°. *Умножение изображений.* Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p),\quad f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$\boxed{F_1(p)F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau}\,.$$

Интеграл в правой части называется ***сверткой функций*** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается $f_1(t) * f_2(t)$. То есть

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p)F_2(p).$$

Заметим, что $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Таблица оригиналов и изображений

$1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$	$e^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$	$t^n \doteqdot \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin bt \doteqdot \dfrac{b}{p^2+b^2}$	$\cos bt \doteqdot \dfrac{p}{p^2+b^2}$	$\operatorname{sh} bt \doteqdot \dfrac{b}{p^2-b^2}$
$\operatorname{ch} bt \doteqdot \dfrac{p}{p^2-b^2}$		

Задачи

1. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, найти изображения для следующих оригиналов:

а). $f(t) = 5 - 2e^{-3t} + 3t$; б). $f(t) = \sin^2 t$;

в). $f(t) = 5e^{-t}\operatorname{ch} 3t$; г). $f(t) = 3^t$;

д). $f(t) = t^2 \cos 2t$; е). $f(t) = te^{2t}\sin 3t$;

ж). $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$; з). $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$;

и). $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1; \\ 1, & 1<t\le 2; \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$ к). $f(t)=\begin{cases} 1, & 0<t<1; \\ -1, & 1<t<2; \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

Ответы: 1. а). $\dfrac{5}{p}-\dfrac{2}{p+3}+\dfrac{3}{p^2}$; **б).** $\dfrac{1}{2p}-\dfrac{p}{2(p^2+4)}$; **в).** $\dfrac{5(p+1)}{(p+1)^2-9}$;

г). $\dfrac{1}{p-\ln 3}$; **д).** $\dfrac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}$; **е).** $\dfrac{6(p-2)}{((p-2)^2+9)^2}$; **ж).** $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$;

з). $\dfrac{4}{(p^2+4)^2}$; **и).** $\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p}$; **к).** $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$.

Домашнее задание

11.1. Используя таблицу оригиналов и изображений и свойства преобразования Лапласа, найти изображения следующих оригиналов:

а). $f(t)=3e^{5t}-2\sin 3t+4$; б). $f(t)=e^{-4t}(\sin t+\cos 2t)$;

в). $f(t)=\dfrac{t^3}{2}-8t^2+4t-1$; г). $f(t)=e^{t}\cos^2 2t$;

д). $f(t)=t^2e^{-5t}$; е). $f(t)=\operatorname{ch}4t\cos 2t$;

ж). $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$; з). $f(t)=\int\limits_0^t e^{-3t}\operatorname{sh}2td\tau$;

и). $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1; \\ 2-t, & 1<t<2; \\ 0, & t<0,\ t>2. \end{cases}$

12. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

Для восстановления оригинала по изображению применяют следующие приемы:

а). использование свойств преобразования Лапласа и таблицы оригиналов и изображений;

б). представление функции $F(p)$ в виде суммы простейших дробей;

в). выделение полного квадрата в знаменателе дроби;

г). представление функции $F(p)$ в виде произведения дробей и использование свойства **9°**;

д). использование теоремы о разложении.

Теорема о разложении. Если функция $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ является правильной рациональной дробью и имеет полюсы в точках p_k $(k=1,2,...,n)$, то оригинал находится по формуле

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{\operatorname{res}}\,(F(p)\cdot e^{pt}).$$

ПРИМЕР 1. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{4}{p}-\frac{3}{p^3}+\frac{4}{p-2}.$$

<u>*Решение.*</u> Преобразуем $F(p)$ так, чтобы можно было воспользоваться таблицей оригиналов и изображений, и применим свойство линейности преобразования Лапласа, тогда:

$$F(p)=4\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{2!}\cdot\frac{2!}{p^3}+4\cdot\frac{1}{p-2}\doteqdot 4-\frac{3}{2}t^2+4e^{2t}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{3p+1}{p^2+4p+13}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в знаменателе и выполняя необходимые преобразования, получаем:

$$F(p)=\frac{3p+1}{p^2+4p+13}=\frac{3(p+2)-5}{(p+2)^2+9}=$$

$$=3\frac{p+2}{(p+2)^2+9}-\frac{5}{3}\frac{3}{(p+2)^2+9}\risingdotseq 3e^{-2t}\cos 3t-\frac{5}{3}e^{-2t}\sin 3t\,.\blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^2}$.

Решение. Преобразуя $F(p)$ таким образом, чтобы можно было использовать таблицу и свойства **1°** и **4°**, получаем

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)^2}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2}=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}\risingdotseq e^t+te^t\,.\blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{13p-21}{(p-1)(p-2)(p+3)}.$$

Решение. Разложим $F(p)$ на простейшие дроби

$$F(p)=\frac{13p-21}{(p-1)(p-2)(p+3)}=\frac{2}{p-1}+\frac{1}{p-2}-\frac{3}{p+3}.$$

Тогда, используя свойство линейности, получаем

$$F(p)=\frac{13p-21}{(p-1)(p-2)(p+3)}\risingdotseq 2e^t+e^{2t}-3e^{-3t}\,.\blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Представим $F(p)$ в виде произведения дробей и применим свойство **9°** преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1}\doteqdot \sin t * \sin t.$$

Найдем свертку функций $\sin t$ и $\sin t$:

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t-2\tau)-\cos t)d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2\tau)-\tau\cos t\right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t.$$

Итак, окончательно имеем

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}\doteqdot \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

<u>*Решение.*</u> Используем теорему о разложении. Функция $F(p)$ имеет три простых полюса: $p_1=0,\ \ p_2=i,\ \ p_3=-i$, для которых

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(F(p)e^{pt}\right)=\operatorname*{res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)}=\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}}{(p^2+1)}=1;$$

$$\operatorname*{res}_{p=i}\left(F(p)e^{pt}\right)=\operatorname*{res}_{p=i}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)}=\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}}{p(p+i)}=-\frac{e^{it}}{2};$$

$$\operatorname*{res}_{p=-i}\left(F(p)e^{pt}\right)=\operatorname*{res}_{p=-i}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)}=\lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}}{p(p-i)}=-\frac{e^{-it}}{2}.$$

Следовательно, по теореме о разложении

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}\doteqdot 1-\frac{e^{it}}{2}-\frac{e^{-it}}{2}=1-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=1-\cos t. \blacksquare$$

Задачи

1. Найти оригиналы следующих изображений:

а). $F(p)=\frac{2}{p}+\frac{5}{p^3}-\frac{7}{p+1}$; б). $F(p)=\frac{3p+4}{p^2+9}$;

в). $F(p)=\frac{2}{(p-3)^2}+\frac{4}{(p+5)^3}$; г). $F(p)=\frac{4-p}{p^2+4p+8}$;

д). $F(p)=\frac{p+3}{(p+1)^2}$; е). $F(p)=\frac{3p-2}{p(p-1)(p+3)}$;

ж). $F(p)=\frac{p}{(p^2+4)^2}$; з). $F(p)=\frac{2e^{-p}}{p+2}$.

Ответы: 1. а). $2+\frac{5}{2}t^2-7e^{-t}$; **б).** $3\cos 3t+\frac{4}{3}\sin 3t$; **в).** $2te^{3t}+2t^2e^{-5t}$; **г).** $3e^{-2t}\sin 2t-e^{-2t}\cos 2t$; **д).** $e^{-t}+2te^{-t}$; **е).** $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}e^{t}-\frac{11}{12}e^{-3t}$; **ж).** $\frac{1}{4}t\sin 2t$; **з).** $2\eta(t-1)e^{-2(t-1)}$.

Домашнее задание

12.1. Найти оригиналы следующих изображений:

а). $F(p)=\frac{3}{p}-\frac{7}{p^4}+\frac{2}{p-3}$; б). $F(p)=\frac{5p-1}{p^2-4}$;

в). $F(p)=\frac{1}{(p+4)^3}-\frac{3}{(p-2)^4}$; г). $F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p-5}$;

д). $F(p)=\frac{p-1}{(p+2)^3}$; е). $F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$;

ж). $F(p)=\frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$; з). $F(p)=\frac{e^{-3p}}{p^2+6p+10}$.

13. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Если дана задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 = f(t),$$
$$x(0) = x_1,\ \ x'(0) = x_2,\ \ \ldots,\ \ x^{(n-1)}(0) = x_n,$$

и $f(t)$ − оригинал, то искомое решение $x(t)$ также является оригиналом.

Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая, что

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0);$$
$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0);$$
$$\ldots$$
$$x^{(n)}(t) \doteqdot p^n X(p) - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0),$$

получаем операторное уравнение, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно $X(p)$. По найденному из этого уравнения изображению $X(p)$ можно восстановить $x(t)$.

ПРИМЕР 1. Решить задачу Коши:

$$x'' + 4x = \cos 2t,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = -1.$$

Решение. Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, тогда по свойству **5°** преобразования Лапласа имеем

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 1.$$

Так как $\cos 2t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+4}$, то операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) - p + 1 + 4X(p) = \frac{p}{p^2+4}.$$

Выражая отсюда $X(p)$, получаем

$$X(p)=\frac{p}{(p^2+4)^2}+\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p^2+4}.$$

Поскольку

$$\frac{p}{p^2+4}\doteqdot\cos 2t,\quad \frac{1}{p^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}\sin 2t,\quad \frac{p}{(p^2+4)^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{p^2+4}\right)'\doteqdot\frac{1}{4}t\sin 2t$$

(свойство **4°**), то решение задачи Коши имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{4}t\sin 2t+\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\,.\blacksquare$$

Замечание. Аналогично можно решать дифференциальные уравнения с произвольными начальными условиями, получая тем самым общие решения уравнений.

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения $x''-2x'+x=e^t$.

Решение. Пусть $x(0)=c_1, x'(0)=c_2$ и $x(t)\doteqdot X(p)$, тогда

$$x'(t)\doteqdot pX(p)-c_1,\quad x''(t)\doteqdot p^2X(p)-c_1p-c_2,$$

и соответствующее операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)-c_1p-c_2-2pX(p)+2c_1+X(p)=\frac{1}{p-1},$$

откуда

$$X(p)=\frac{c_1p+c_2-2c_1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-1)^3}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{c_1(p-1+1)}{(p-1)^2}+\frac{c_2-2c_1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-1)^3}=\frac{c_1}{p-1}+\frac{c_2-c_1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-1)^3}.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения

$$x(t)=c_1e^t+\tilde{c}_2te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\ \ (\tilde{c}_2=c_2-c_1).\blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3. \\ z' = x + z, \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), \quad y(t) \risingdotseq Y(p), \quad z(t) \risingdotseq Z(p)$, тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - 1, \quad y'(t) \risingdotseq pY(p) - 2, \quad z'(t) = pZ(p) - 3.$$

Система операторных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) + Z(p) = 1, \\ X(p) - (p-1)Y(p) = -2, \\ X(p) + (1-p)Z(p) = -3. \end{cases}$$

Применяя метод Крамера, получаем

$$X(p) = \frac{(p-1)(p-2)}{p(p-1)^2} = \frac{p-2}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1} \risingdotseq 2 - e^t;$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 4e^t - te^t;$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 5e^t - te^t.$$

Итак, $x(t) = 2 - e^t$, $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$, $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$.■

Задачи

1. Решить задачу Коши $x'' + 2x' + x = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0$.
2. Решить задачу Коши $x''' - x'' = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1$.
3. Найти общее решение уравнения $x'' + 9x = \cos 3t$.
4. Решить задачу Коши $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.
5. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Ответы: 1. $x(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}te^t$. **2.** $x(t)=1-t+e^t$.

3. $x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+\frac{1}{6}t\sin 3t$. **4.** $x(t)=3e^t-3-2t-t^2-\frac{t^3}{3}$.

5. $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t), y(t)=e^t(\cos t+3\sin t)$.

Домашнее задание

13.1. Решить задачу Коши $x'+2x=2-3t,\ \ x(0)=0$.

13.2. Решить задачу Коши $x''-3x'+2x=2e^{3t},\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=3$.

13.3. Решить задачу Коши $x''-x'=t^2,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=1$.

13.4. Решить задачу Коши $x'''-x''=0,\ \ x(0)=2,\ \ x'(0)=0,\ \ x''(0)=1$.

13.5. Решить систему

$$\begin{cases} x'=y-7x, \\ y'=-2x-5y, \end{cases} \quad x(0)=2,\ \ y(0)=0.$$

13.6. Решить систему

$$\begin{cases} x'+2x+2y=10e^{2t}, \\ y'-2x+y=7e^{2t}, \end{cases} \quad x(0)=1,\ \ y(0)=3.$$

13.7. Решить систему

$$\begin{cases} x''-3x-4y+3=0, \\ y''+x+y-5=0, \end{cases} \quad x(0)=x'(0)=0,\ \ y(0)=y'(0)=0.$$

13.8. Решить систему

$$\begin{cases} x'=2x-y+z, \\ y'=x+z, \\ z'=-3x+y-2z, \end{cases} \quad x(0)=1,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=0.$$

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Вычислить:

а). $\sqrt[3]{-2+2i}$; б). 3^{2-i}; в). $\operatorname{ch}(2+i)$.

2. Для функции $f(z)$ найти область аналитичности и производную, если она существует

а). $f(z)=z^2-\operatorname{Re}z+2i$; б). $f(z)=\dfrac{1}{z-4i}$.

3. Проверить, может ли функция $v(x,y)=x^2-y^2-2y$ быть мнимой частью аналитической функции. Если может, то восстановить эту функцию.

Вариант 2

1. Вычислить:

а). $(1-i)^{25}$; б). $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)$; в). $\sin(-3+4i)$.

2. Для функции $f(z)$ найти область аналитичности и производную, если она существует

а). $f(z)=z^2+3iz-2$; б). $f(z)=\operatorname{ch}\overline{z}$.

3. Проверить, может ли функция $u(x,y)=2\sin x\operatorname{ch}y-x$ быть действительной частью аналитической функции. Если может, то восстановить эту функцию.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_L \operatorname{Re}(z^2)dz$, где L – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$.

2. Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z - 4}, \quad 2 < |z + 1| < 3.$$

3. Найти все конечные изолированные особые точки функции $f(z)$, определить их тип. Найти вычеты.

$$\text{а).}\ f(z) = \frac{e^{2z} - z}{z^2}; \qquad \text{б).}\ f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z+1)}.$$

4. Вычислить интегралы:

$$\text{а).}\ \oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-i)(z+2)}dz; \qquad \text{б).}\ \oint\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2}dz.$$

Вариант 2

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_L (2z+1)\bar{z}dz$, где L – часть окружности $|z| = 2$, $\pi/2 < \arg z < \pi$.

2. Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}, \quad 2 < |z| < +\infty.$$

3. Найти все конечные изолированные особые точки функции $f(z)$, определить их тип. Найти вычеты.

$$\text{а).}\ f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2(z-3)^2}; \qquad \text{б).}\ f(z) = z^2 \sin\frac{1}{2z}.$$

4. Вычислить интегралы:

$$\text{а).}\ \oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz; \qquad \text{б).}\ \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 - 3z^3 + z^4}{z^4}dz.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Найти изображение оригинала $f(t) = t^2 \sin 5t + 3e^{-2t}$

2. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3 + 4p^2 + 5p}$.

3. Решить уравнение $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Вариант 2

1. Найти изображение оригинала $f(t) = \dfrac{4}{e^{2t}} - e^{-t}\,\mathrm{ch}\,2t$.

2. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{2p-3}{(p-2)^4}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + x + y = 0, \\ y' + x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Вариант 3

1. Найти изображение оригинала $f(t) = 3^t + 4t^3 e^{-2t}$.

2. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}(e^{-p} + 2e^{-2p})$.

3. Решить уравнение $x'' - 4x' + 4x = 4t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 7$.

Ответы

1.1. а). $1\cdot e^{-i\pi/4}$; б). $1\cdot e^{4\pi i/5}$; в). $\sqrt{13}e^{i(\operatorname{arctg}1{,}5-\pi)}$; г). $6e^{i\pi/6}$; д). $5e^{-i\pi/2}$; е). $7e^{i\pi}$; ж). $\sqrt{5}e^{-i\operatorname{arctg}2}$. **1.2.** $-1+2i$; $-5-4i$; $-3-11i$; $(-9+7i)/13$.

1.3. а). $-(1+8i)/3$; б). –13; в). 0. **1.4.** $\sqrt{68}$.

1.5. а). $-2^{13}3^7(1+i\sqrt{3})$; б). $-2^{12}(1+i)$; в). $-i2^9$.

1.6. а). ± 2; $1\pm i\sqrt{3}$; $-1\pm i\sqrt{3}$; б). $\pm(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$; в). $\pm\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)$;

г). $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{12}+i\sin\dfrac{9\pi}{12}\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{12}+i\sin\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

1.7. а). $2\pm 2i$; б). 2; $-1\pm i\sqrt{3}$; 1; $(-1\pm i\sqrt{3})/2$; в). i; $1+i$.

2.1. а). расходится; б). сходится абсолютно; в). расходится; г). сходится.

3.1. а). $-5+i$; б). $0{,}4-0{,}2i$; в). –4.

3.2. а). $e^{-3}(\cos 2+i\sin 2)$; б). $\cos 2\operatorname{ch}2-i\sin 2\operatorname{sh}2$; в). $(\operatorname{sh}1+i\operatorname{ch}1)/\sqrt{2}$; г). $-i\operatorname{cth}\pi$; д). $\ln 2+i(\pi+2\pi k)$; е). $\ln 5+i(\pi/2+2\pi k)$; ж). $\ln 3+i2\pi k$; з). $\ln\sqrt{8}+i(3\pi/4+2\pi k)$; и). $\ln\sqrt{13}+i(-\operatorname{arctg}1{,}5+2\pi k)$;

к). $1000e^{2\pi k}(\cos\ln 10-i\sin\ln 10)$; л). $e^{-8\pi/3-8\pi k}(\cos\ln 16+i\sin\ln 16)$;

м). $2\pi k\pm\pi/2-i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$.

3.3. а). $u=x^3-3xy^2-y+3$, $v=3x^2y-y^3+x$;

б). $u=\sin x\operatorname{ch}y$, $v=-\cos x\operatorname{sh}y$; в). $u=x^2-y^2$, $v=-2xy$;

г). $u=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$;

д). $u=\dfrac{x^2+x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$, $v=\dfrac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}$;

е). $u=x\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, $v=y\sqrt{(x+1)^2+y^2}$.

4.2. а) $f(z)=iz+3+2i$; б) $f(z)=z^3+2+iC$; в). $f(z)=2\sin z-z$.

5.1. $2+2i$. **5.2.** $-2\pi-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}i$. **5.3.** $\frac{\sqrt{13}}{2}(3+2i)$.**5.4.** $-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}i$.

5.5. а) 0; б) $2\cos 1-\sin 1+i(3\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1)$.

5.6. а). $\frac{\pi i}{2}$; б). 0; в). $-\frac{2\pi i}{3}$; г) $\frac{2\pi(e^6-1)i}{3}$; д). $-2\pi i$; е). $2\pi e i$.

6.1. а). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{n+1}}, |z|<\sqrt{3}$; б). $\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}-\frac{1}{n}\right)z^n, |z|<1$;

в). $\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}, z\in\mathbb{C}$;

г). $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^n}(z-1)^n, |z-1|<\frac{3}{2}$.

6.2. а). $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)z^n, |z|<2$; $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3\cdot 4^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{3\cdot z^{n+1}}, 2<|z|<4$;

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n 4^n}{3z^{n+1}}, |z|>4$; б). $\frac{2}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{18}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}(z-2)^n, 0<|z-2|<6$;

$\frac{2}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 6^n}{(z-2)^{n+1}}, 6<|z-2|<+\infty$.

6.3. а). $z^4-2z^2+\frac{2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+4}}{(2n+4)!\,z^{2n}}, 0<|z|<+\infty$;

б). $z-\frac{2}{z}+\frac{3}{z^4}, 0<|z|<+\infty$; в). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-1}, 0<|z|<+\infty$.

6.4. а). $-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$; б). $\frac{1}{z-3}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-3)^n$;

в). $-\frac{i}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n(z-i)^n}{2^n}$.

7.1. а). $z=2$ − полюс 3-го порядка, $z=0$ − полюс 4-го порядка;
б). $z=0$ − устранимая особая точка; в). $z=-1$ − полюс 2-го порядка, $z=1$ − простой полюс; г). $z=0$ − простой полюс, $z=2\pi k (k=\pm 1, 2, \ldots)$

− полюса 2-го порядка; д). $z=0$ − существенно особая точка;
е). $z=-2i, z=\pm 1$ − простые полюса; $z=2i$ − устранимая особая точка;
ж). $z=\pm 2\pi$ − устранимые особые точки, $z=0$ − простой полюс;
з). $z=0$ − полюс 6-го порядка.

8.1. а). 0;б). πi; в). $\pi i\left(1-\frac{2}{e}\right)$; г). $\frac{2\pi i}{e}$; д). $-\frac{\pi^4 i}{3}$; е). $\frac{\pi i}{2}$; ж). $2\pi i$;
з). $-2\pi i$.

10.1. а). $\pi/2$; б). 0; в). $\pi/54$; г). $\pi/\sqrt{2}$.

11.1. а). $\frac{3}{p-5}-\frac{6}{p^2+9}+\frac{4}{p}$; б) $\frac{1}{(p+4)^2+1}+\frac{p+4}{(p+4)^2+4}$;
в). $\frac{3}{p^4}-\frac{16}{p^3}+\frac{4}{p^2}-\frac{1}{p}$; г). $\frac{1}{2(p-1)}+\frac{p-1}{2((p-1)^2+16)}$; д). $\frac{2}{(p+5)^3}$;
е). $\frac{p-4}{2((p-4)^2+9)}+\frac{p+4}{2((p+4)^2+9)}$; ж). $\ln\frac{p}{p-1}$; з). $\frac{2}{p((p+3)^2-4)}$;
и). $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$.

12.1. а). $3-\frac{7}{6}t^3+2e^{3t}$; б). $5\operatorname{ch}2t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$; в). $\frac{1}{2}t^2e^{-4t}-\frac{1}{2}t^3e^{2t}$;
г). $e^{-t}\operatorname{ch}\sqrt{6}t+\frac{2}{\sqrt{6}}e^{-t}\operatorname{sh}\sqrt{6}t$; д). $te^{-2t}-\frac{3}{2}t^2e^{-2t}$; е) $\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$;
ж). $-\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos t$; з). $e^{-3(t-3)}\sin(t-3)$.

13.1. $x(t)=1{,}75-1{,}5t-1{,}75e^{-2t}$. **13.2.** $x(t)=e^{3t}$.

13.3. $x(t)=3e^t-3-2t-t^2-t^3/3$. **13.4.** $x(t)=1-t+e^t$.

13.5. $x(t)=2e^{-6t}(\cos t-\sin t), y(t)=-4e^{-6t}\sin t$.

13.6. $x(t)=e^{2t}, y(t)=3e^{2t}$.

13.7. $x(t)=7t\operatorname{sh}t-17\operatorname{ch}t+17, y(t)=12\operatorname{ch}t-3{,}5t\operatorname{sh}t-12$.

13.8. $x(t)=2-e^{-t}, y(t)=2-e^{-t}, z(t)=2e^{-t}-2$.

Литература

1. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Т.2. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 256с.
2. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т.* и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592с.
3. *Краснов М.Л., Киселев А.И.* и др. Вся высшая математика. Т.4. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 352с.
4. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 208с.
5. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Под редакцией Ефимова А.В. Ч.3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 576с.
6. *Афанасьев В.И., Зимина О.В.* и др. Высшая математика. Специальные разделы – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 400с.