РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике, 1курс, 2020

1. Известно, что $x^2+5x+1=0$. Найти $x^{64}+x^{-64}$.

2. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Доказать, что для всех точек окружности сумма квадратов расстояний до вершин квадрата постоянна, и найти эту величину.

3. Найти все корни уравнения $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K, а на диагонали AC – точка M так, что $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Доказать, что точки K, M, B лежат на одной прямой.

5. Биссектрисы внутренних углов треугольника лежат на прямых $2x+11y+6=0$ и $9x-13y+27=0$. Составить уравнение прямой, на которой лежит сторона треугольника, не проходящая через вершину $A(-2,-7)$.

6. Известно, что $f(1)=2$ и что при любых x, y $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$. Найти для любого целого n $f(n)$.

7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$.

8. Известно, что A – матрица размера 3×2, B – матрица размера 2×3 и что $AB=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти BA.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2020 г.

1. У 25 равных квадратиков каждую сторону покрасили в один из n цветов. Можно прикладывать квадратики друг к другу одноцветными сторонами. Оказалось, что по этому правилу для каждого из используемых цветов можно сложить из всех квадратиков большой квадрат 5x5 таким образом, чтобы все стороны большого квадрата были покрашены в этот цвет. Найдите наибольшее возможное n.

2. Найдите наименьшее натуральное значение k, при котором система

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ x_1 + kx_2 + ... + x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ \quad .... & & \\ x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + kx_n & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выезжает велосипедист и выходит пешеход. Скорость велосипедиста 25 км/ч. После встречи они поворачивают назад и возвращаются каждый в свой город, причем велосипедист при этом движется с прежней скоростью, а пешеход увеличивает свою скорость на 1 км/ч. С какой скоростью должен идти пешеход, чтобы его время нахождения в пути было наибольшим?

4. Найдите предел последовательности:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2},\ n \geq 1,\ x_1 > 0,\ a > 0.$$

5. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, одна из которых расположена строго внутри другой (окружности не имеют общих точек).

6. Докажите равенство

$$\int\limits_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int\limits_0^1 e^{x^2} dx = e.$$

7. Общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ задан формулой

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \neq 3k \\ -\dfrac{2}{n}, & n = 3k \end{cases}.$$

Сходится ли этот ряд? Ответ обоснуйте.

8. Единичный куб проецируется на некоторую плоскость и на перпендикулярную к ней прямую. Докажите, что площадь проекции в первом случае численно равна длине проекции во втором.

28.11.2019

I курс

1. Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}=0{,}7$.
2. Найти наименьшую возможную сторону квадрата, внутри которого можно разместить без наложения 5 квадратов со стороной 1.
3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}$, если $x_1; x_2; x_3$ – корни уравнения $8x^3-4x+1=0$.
4. Вычислить $\cos 7^{\circ}+\cos 79^{\circ}+\cos 151^{\circ}+\cos 223^{\circ}+\cos 295^{\circ}$.
5. Составить уравнения всех окружностей, проходящих через точки $A(-2;4), B(6;-4)$.
6. Существует ли такая функция $f(x)$, что $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4-\frac{1}{x^4}+2$?
7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,6x(\sin x-\cos x)$.

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Олимпиада по высшей математике
2-4 курс, 2019 г.

1. По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: "Ты — мальчик"или "Ты — девочка". Таких фраз оказалось поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек стоит по кругу?

2. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения медиан граней BCD, CDA, ABD и ABC соответственно в тетраэдре $ABCD$. Найдите отношение объема тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ к объему тетраэдра $ABCD$.

3. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{8n-\sqrt{6}}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$.

4. Найдите ранг матрицы при всех действительных значениях λ
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & ... & n-1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & ... & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & ... & n-1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & ... & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n & 1 \end{pmatrix}$$

5. Докажите, что для $x > 0$ и натурального n имеет место неравенство
$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

6. Вычислите интеграл
$$\int\limits_0^{100\pi} \arccos(\cos x)\sqrt{1-\cos 2x}dx.$$

7. Решите дифференциальное уравнение
$$x^2y(ydx + xdy) = 2ydx + xdy.$$

8. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{xy \operatorname{tg}(x+y)}{x^2 - xy + y^2}$.

9. Пусть A и B — невырожденные матрицы размера 3×3 с вещественными элементами. Докажите, что
$$A - (A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} = ABA$$
(если все указанные обратные матрицы существуют).

10. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определенного места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

28.11.2018

I курс

1. Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n. Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - 2n$, если n – трёхзначное число?
2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1 = a;\ x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$ при $n \geq 1$. Найти все a, при которых последовательность определена и имеет конечный предел.
3. Для каких чисел a и b найдётся многочлен степени не выше 2 $P(x)$ такой, что $P(0) = P(1) = 0$ и $P'(a) = b$?
4. Найти определитель матрицы $A = \{a_{ij}\}$, если $a_{ij} = min(i, j);\ i, j = 1,2, \ldots n$.
5. Пусть A – матрица размера $m \times n$, имеющая ранг 1. Доказать, что найдутся матрицы B и C размеров $m \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, такие, что $A = BC$.
6. Из произвольной точки гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличной от $(1; 0)$ и $(-1; 0)$, проведены две касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, касается гиперболы.
7. Доказать, что для любого натурального n число $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ является целым и нечётным.

28.11.2018

II-IV курсы

1. Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n. Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - 2n$, если n – трёхзначное число?

2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1 = a;\ x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}$ при $n \geq 1$. Найти все a, при которых последовательность определена и имеет конечный предел.

3. Пусть A – матрица размера $m \times n$, имеющая ранг 1. Доказать, что найдутся матрицы B и C размеров $m \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, такие, что $A = BC$.

4. Из произвольной точки гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличной от $(1; 0)$ и $(-1; 0)$, проведены две касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, касается гиперболы.

5. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7-2018x^5+2019x^3-20202020x+e}{cos^2x} dx$.

6. Доказать, что каждое решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2+t^4+cosx}$ ограничено.

7. Вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

30.11.2017

I курс

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С.» В: «С по рангу выше, чем А.» Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»
2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}arccos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$.
3. Найдите все возможные тройки чисел $(x; y; z)$, если известно, что $x! + y! = 24z + 2017$, числа x и y –натуральные, а z - целое и нечётное.
4. Сколько различных векторов длины $5\sqrt{2}$ с целочисленными координатами существует в 3-мерном пространстве?
5. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы $cos^2x + cos^2 2x + \cdots + cos^2 nx$.
6. Пусть L – точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Найдите длину отрезка KC.
7. Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_0 = 0$; $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 243, \text{если } a_n \le 0, \\ a_n - 343, \text{если } a_n > 0. \end{cases}$ Найти $min\{n \in \mathbb{N}: a_n = 1\}$
8. Существует ли в 3-мерном пространстве треугольник площади $\sqrt{7}$, вершины которого имеют целочисленные координаты?
9. При каких значениях параметра a уравнение $4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$ имеет ровно три различных решения?
10. Найти все целочисленные решения матричного уравнения

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, если $A^T = A$.

30.11.2017

II-IV курсы

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. A, B и C – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. A и B сказали следующее. A: «B по рангу выше, чем C.» B: «C по рангу выше, чем A.» Что ответил C на вопрос: «Кто выше по рангу – A или B?»

2. Найдите все возможные тройки чисел $(x; y; z)$, если известно, что $x! + y! = 24z + 2017$, числа x и y –натуральные, а z - целое и нечётное.

3. При каких значениях параметра a уравнение
$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3) = 0$ имеет ровно три различных решения?

4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}arccos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$.

5. Доказать, что $\underbrace{sinsinsin\ldots sin}_{2017 \text{ раз}} 1 < \frac{1}{12}$.

6. При каких значениях константы $\alpha > 0$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-n^{-\alpha})^n$?

7. Найти интеграл $\int\frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^6}dx$.

8. Сколько несовпадающих частных производных 2017-го порядка имеет функция $f(x,y,z) = sinx\cdot siny\cdot sinz$?

9. Даны константы $A, B \in \mathbb{R}$ и $m > k > 0$. Найти предел
$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(Asinkt + Bsinmt)^2dt$.

10. Решить задачу Коши $\begin{cases} y''cosx - 2y'sinx + 8ycosx = 0, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{cases}$

05.12.2016

I курс

1. (10 баллов)

В большом бочонке 8 литров нефти. Требуется разлить эту нефть пополам в две ёмкости. В наличии имеется еще два пустых бочонка: в один входит 5 литров, в другой – 3 литра. Как разлить нефть не более чем за 7 переливаний?

2. (15 баллов)

Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(cos\,\frac{a}{n}\right)^n$ при любом значении a.

3. (15 баллов)

Решить уравнение $X^{2016}=X^2$, где $X=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$; $x^2+y^2>0$.

4. (15 баллов)

Может ли сечение куба (некоторой плоскостью) быть правильным пятиугольником?

5. (15 баллов)

Решите неравенство $y^2+y^3+\sqrt[4]{y^3-x^2-3xy}\le 5xy$ в действительных числах.

6. (15 баллов)

Докажите, что геометрическое место середин параллельных отрезков с концами на разных ветвях гиперболы есть прямая.

7. (15 баллов)

Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_1=1$; $a_{n+1}=\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_n, & \text{если } n \text{ чётно}\\ a_n+1, & \text{если } n \text{ нечётно}\end{cases}$

Найдите остаток от деления a_{2016} на 24.

05.12.2016

II-IV курсы

1. (15 баллов)
Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком (состоящим, очевидно, из одного торта, одной банки варенья и одной кастрюльки молока)?

2. (15 баллов)
Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$.

3. (20 баллов)
Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

4. (20 баллов)
Пусть квадратные матрицы из действительных чисел A и B такие, что $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$. Приведите пример таких матриц и докажите, что $detA = detB$.

5. (15 баллов)
Решите дифференциальное уравнение $x(x+y)y' = x + xy + y^2$.

6. (15 баллов)
Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2}e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$.

I курс, декабрь 2015

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?
2. Могут ли $sin\varphi$ и $cos\varphi$ быть одновременно ненулевыми рациональными числами?
3. Решить уравнение: $(tgx + ctgx)(2 + siny) = 2.$
4. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.
5. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a, элементы его побочной диагонали равны b, а остальные элементы равны нулю.
6. Докажите тождество: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a}\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right).$
7. Найти $\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$, если $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + \sqrt{1 + x^4}$ при $x > 0.$
8. Вычислите предел (или же установите, что он не существует):
$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sqrt{sin\frac{1}{x^2}}$.
9. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \ldots$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и не зависит от $x_1 (x_1 \in \mathbb{R}).$
10. Найдите $detA$, если A – матрица размера 2×2 и $A^2 + E = 0.$

II-IV курсы, декабрь 2015

1. В пещере живут сороконожки и трёхголовые драконы – всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?

2. Площадь трапеции равна 2, а сумма её диагоналей равна 4. Найдите высоту трапеции.

3. Вычислите определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a, элементы его побочной диагонали равны b, а остальные элементы равны нулю.

4. Пусть $x_i = \cos(x_{i-1})$ при $i = 2; 3; 4; \ldots$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и не зависит от $x_1 (x_1 \in \mathbb{R})$.

5. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^4 - y^2 + 2x^2 y}$.

6. Длина верёвки 12 метров. Каким образом нужно разрезать верёвку на 3 части длиной x, y, z (метров), чтобы величина xy^2z^3 приняла наибольшее возможное значение.

7. Вычислите неопределённый интеграл: $\int \frac{ln(lnx)}{xln^2x} dx$.

8. Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

9. Найдите общее решение уравнения $y = xy' + x^2y''$.

10. Найдите сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$.

04.03.2015, 1-4 курсы

1. Плоскость выкрашена в три цвета. Доказать, что для любого положительного числа d найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно d.
2. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = x^2 - 4$.
3. Докажите, что определитель любого порядка (не менее двух), каждый из элементов которого по модулю равен 1, сам не может равняться по модулю 1.
4. Постройте график функции $y = \lim\limits_{n\to+\infty}(x-1)arctg(x^n)$
5. При каких a, b функция $f(x) = \begin{cases} a, x = 0 \\ b, x = 1 \\ \frac{xlnx}{x^2-1}, x > 0, x \neq 1 \end{cases}$ дифференцируема при $x > 0$?
6. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.
7. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}$.
8. Докажите, что все решения уравнения $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ ограничены на всей числовой оси.
9. Найдите многочлен $P(x)$ третьей степени с целочисленными коэффициентами, такой что $\int_0^1 xP(x)dx = \int_0^1 x^3P(x)\,dx = \int_0^1 x^5P(x)dx = 0$.
10. Для всякой ли матрицы A второго порядка можно найти такие числа p, q , что $A^2 + pA + qE = 0$?

1 курс, декабрь 2014

1. Дроби $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$ образуют арифметическую прогрессию. Можно ли составить арифметическую прогрессию, содержащую 4 члена вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и такую, что все её члены различны? А аналогичную, содержащую 10 членов такого вида? А 1000 членов?

2. Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 21C & 7Z & 133c \\ 15A & 5X & 95a \\ 3B & Y & 19b \end{vmatrix}$. Вычислить $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

3. Вычислите $\cos 7^0 + cos79^0 + cos151^0 + cos223^0 + cos295^0$.

4. Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются под углом 30^0. Докажите, что хотя бы одно из чисел A_1, B_1, A_2, B_2 иррационально.

5. Найдите область определения функции $y = log_2 log_3 log_4 log_5 x$.

6. Найдите значение выражения $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5 \ldots}}}}}}$.

7. Вычислите $y^{(n)}$ (n-ю производную, $n \in \mathbb{N}$) для функции $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

8. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 + x - e^x}$.

9. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (т.е. такие матрицы B, что $AB = BA$).

10. Может ли сечением куба (плоскостью) быть правильный пятиугольник?

I курс, март 2014

1. Доказать, что многочлен $\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{24} + \frac{x}{30}$ при любых целых x принимает целые значения.

2. Постройте линию, задаваемую уравнением
$|y| = (|x| - 1)(|x| - 3)$.

3. Дано: $ABCD$ — прямоугольник, M — любая точка пространства. Доказать, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

4. Найти A^{2014}, если $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2014x}$.

6. Найти a и b, если $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x^3+ax+b} = -3$.

7. Найти $f(x)$, если $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1) \\ f(x) + f(x-1) = x \end{cases}$.

8. Доказать, что $sinx + tgx > 2x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Пусть Δ_n – определитель порядка n, в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами (-1), остальные элементы – нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14}.

10. Две вершины треугольника фиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании вдвое больше другого. Доказать, что она движется по гиперболе.

II-IV курсы, март 2014

1. Постройте линию, задаваемую уравнением $log_2(4x^2 + y^2) = log_2^2(x^2 + 0{,}25y^2)$.

2. Найти $A^{20142014}$, если $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. Доказать, что $sinx + tgx > 2x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Пусть Δ_n – определитель порядка n, в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу – числами (-1), остальные элементы – нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n$ и найти Δ_{14}.

5. Найти $y(x)$,если $y(x) = \int_0^x y^2(t)dt + 2014x$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 2014y_1 + y_2 \\ y_2' = 2014y_2 + y_3 \\ y_3' = 2014y_3 \end{cases}$.

7. Функция $f(x)$ положительна на всей оси. Вычислить $\int_a^b \frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.

8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$.

9. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.

10. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ – последовательные корни уравнения $x = tgx$?

Технари, 1 курс, 2013

1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$.

2. Дифференцируема ли в нуле функция $f(x)=\sqrt[3]{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$?

3. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$. Доказать, что если $f(0)=f(1)=0$, то в некоторой точке $(0;1)$ $f'(x)=f(x)$.

4. Решить уравнение $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1|+|x-1|)$.

5. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}$ не равен нулю.

6. Найти угол, под которым пересекается парабола $y=px^2$ ($p\neq 0$) и эллипс $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

7. Доказать, что для любого натурального n число $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ является целым и нечетным.

Экономисты , 1 курс, 2013

1. (1 б.) Доказать, что если $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ - медианы ΔABC, то $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

2. (2 б.) Вычислить производную функции $y=\log_{(x+5e^{-x})}(\sin\sqrt{x}-\lg(\arcsin x))$.

3. (2 б.) Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}-\ln n}$ на сходимость.

4. (3 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.

5. (3 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix}<0$.

6. (3 б.) Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos(\ln(x+1)-\cos(\ln x))$.

7. (3 б.) Найти a и x_0 при условии, что уравнение $3x^4-4x^3+a=0$ имеет единственный корень x_0.

8. (3 б.) При каком $\alpha\in R$ существует вектор $\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=3$, $\vec{a}\times(\vec{j}-\vec{i}+2\vec{k})=\alpha\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$?

9. (4 б.) Дан треугольник с вершинами $A(0;-4), B(3;0), C(0;6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

10. (4 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 2, 3, 5. Какова вероятность, что оно делится

а) на 4;

б) на 5?

Экономисты, 2-4 курс, 2013

1. (1 б.) Вычислить производную функции $y = \log_{(x+2\lg x)}(\cos\sqrt{x} - \log_3(arcctgx))$.

2. (2 б.) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и составить уравнение общего перпендикуляра к этим двум прямым.

3. (2 б.) Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

4. (2 б.) Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos(\ln(x+1) - \cos(\ln x))$.

5. (3б.) Дан треугольник с вершинами $A(0;-2), B(4;0), C(0;11)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

6. (3 б.) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 4, 6, 8. Какова вероятность, что оно делится

а) на 4;

б) на 5?

7. (3б.) Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$.

8. (3б.) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x=-1$, если $z = x^2 + y^2 + 2y$, где $y(x)$ есть решение уравнения $1 + x + y^2 = e^{x+y^2}$.

9. (5 б.) В круг, куда вписан квадрат, наудачу бросаются 7 точек. Какова вероятность, что 3 точки попадут в квадрат, а 4 – по одной в каждый из образовавшихся круговых сегментов?

10. (6б.) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}|a\cos nx - b\sin nx|dx$, $a,b \in R, n \in N, ab > 0$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ПЕРВОГО КУРСА, МАРТ - 2012 г.

1. Найти вторую производную функции $y=\log_{arctg\sqrt{x}}(\cos x)$. (1 б.)

2. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{3z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+5y-3z-1=0, \\ x-7y-11z+2=0. \end{cases}$$ (1 б.)

3. Найти A и B, при которых $f(x)=\begin{cases} A\sin\pi x, & x\le 1, \\ 1+Bx^2, & x>1 \end{cases}$ непрерывна на

всей числовой оси. (1 б.)

4. Что больше: e^{π} или π^{e}? Ответ обосновать. (2 б.)

5. Найти производную $(\ln(1+\sin(2x^3)+e^{-x^2}))'_u$, где $u=\mathrm{arctg}(x^2+\ln x)$ (2 б.)

6. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{2x^3-3x+4}{x^2+x}+e^{-x^2}\sin 2x$ (3 б.)

7. Доказать, что уравнение $e^x\sin x=a$ разрешимо относительно x при любой заданной постоянной величине a. (4 б.)

8. Кардиоида на плоскости xOy задается параметрически двумя уравнениями $x=a(2\cos t-\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t).$ Здесь t – параметр, a – положительная постоянная. Показать, что в двух точках кардиоиды, соответствующих значениям параметра t, отличающимся на $\frac{2}{3}\pi$, касательные параллельны. (4 б.)

9. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим? (5 б.)

10. Доказать, что выражение $S=\dfrac{y'''}{y'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$ не изменится, если заменить у на 1/у. (8 б.)

11. Найти пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(x-\sin x)^2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$ (1 + 1 =2 б.)

12. Два двугранных угла A и B расположены в пространстве так, что их ребра пересекаются под прямым углом. Одна грань угла B перпендикулярна обеим граням угла A, а другая грань угла B пересекается с гранями угла A по двум лучам, выходящим из точки пересечения ребер углов A и B. Требуется найти угол ψ между этими лучами. Линейные углы A и B известны и, соответственно, равны α и φ (10 б.)

13. Найти все значения производной y'_x в точке $x = y = 0$, если $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ (6 б.)

14. Последовательность $\{x_n\}$ определена следующим образом: $x_0=a$, $x_1=b$, $x_{n+2}=(x_n+3x_{n+1})/4$ при $n\geq 0$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

и найти его. (10 б.)