

Глава 6. Линейные операторы

6.1. Определения. Действия над линейными операторами

Пусть даны векторные пространства F и G . Функция A , сопоставляющая каждому вектору из F определённый вектор из G , называется **линейным оператором**, действующим из F в G , если для любых векторов x и x' из F и для любых чисел α и α' выполнено условие

$$A(\alpha x + \alpha' x') = \alpha A(x) + \alpha' A(x') \quad (1)$$

Отметим сразу, что условие (1) эквивалентно совокупности двух условий:

- для любых x, x' из F

$$A(x + x') = A(x) + A(x'), \quad (2)$$

- для любого x из F и любого числа α

$$A(\alpha x) = \alpha A(x) \quad (3)$$

(Докажите эту эквивалентность!)

Укажем также, что, наряду с обозначением $A(x)$ для значения оператора A на векторе x употребляется обозначение без скобок: Ax .

Естественно, пространство F называется **областью определения** оператора A , а множество

$$A(F) = \{y : y \in G, \exists x \in F : y = Ax\} \quad (4)$$

– **областью значений** этого оператора.

ПРИМЕР 1. Функция, сопоставляющая любому $x \in F$ нулевой вектор из G , является линейным оператором, что очевидно из определения (1). Этот оператор называется **нулевым оператором**, или **оператором аннулирования** из F в G и обозначается символом O . Таким образом,

$$\forall x \in F : O(x) = 0 \in G \quad (5)$$

ПРИМЕР 2. Пусть F – векторное пространство. Функция $I: F \rightarrow F$ такая, что

$$\forall x \in F : Ix = x \quad (6)$$

является линейным оператором.

Действительно, $I(\alpha x + \alpha' x') = \alpha x + \alpha' x' = \alpha Ix + \alpha' Ix'$, и (1) выполнено.

Оператор (6) называют **тождественным**, или **единичным** оператором.

ПРИМЕР 3. Пусть $F = G = R$, где k – фиксированное число. Рассмотрим функцию

$$y = kx : R \rightarrow R \quad (7)$$

Это тоже линейный оператор, ибо $k(\alpha x + \alpha' x') = \alpha(kx) + \alpha'(kx')$, и условие (1) выполнено.

При $k = 0$ данный оператор является оператором аннулирования, при $k = 1$ это тождественный оператор.

На привычном для нас языке: оператор (7) – это обычная прямая пропорциональность (рис. 1).

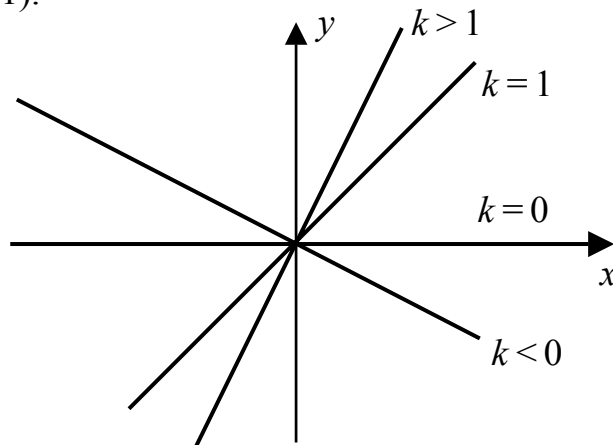


Рис. 1. Графики оператора (7) при различных k .

ПРИМЕР 4. Предыдущий пример можно обобщить на случай, когда $F = G$, но эти пространства не совпадают с R . В этом случае оператор $y = kx : F \rightarrow F$ называется **оператором подобия**, или **гомотетии**. Например, если $F = V_2$ есть пространство геометрических векторов плоскости, то действие этого оператора на любой вектор сводится к растяжению этого вектора в $|k|$ раз и изменению его направления при $k < 0$. Т.е. действительно получается преобразование подобия на плоскости с коэффициентом k и центром в начале отсчёта.

ПРИМЕР 5. Пусть в трёхмерном пространстве заданы плоскость Π и прямая Δ , не параллельная плоскости. Введём **оператор проектирования векторов из V_3 на плоскость Π параллельно прямой Δ** , как показано на рис. 2. Это тоже линейный оператор (выполнение равенства (2) показано на рис. 2, равенство (3) очевидно). В частном случае, когда прямая Δ перпендикулярна плоскости Π , получается **оператор ортогонального проектирования на плоскость**.

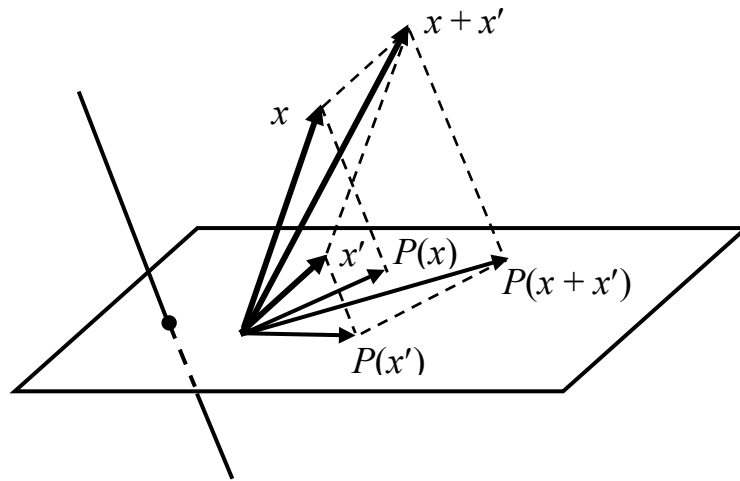


Рис. 2. Проектирование на плоскость параллельно прямой.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим векторное пространство $C^1(I)$, состоящее из функций, непрерывно дифференцируемых на интервале I числовой оси. Каждой функции $f(x) \in C^1(I)$ однозначно соответствует её производная $Df(x) = f'(x)$, являющаяся вектором пространства $C(I)$ непрерывных на I функций. Соответствие $D: C^1(I) \rightarrow C(I)$ является линейным оператором. В самом деле, пусть $f(x), g(x) \in C^1(I)$, и α, β – числа. Тогда

$D(\alpha f(x) + \beta g(x)) = [\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$, что и требуется.

Линейный оператор D называется оператором дифференцирования.

Зафиксируем векторные пространства F и G . Множество всех линейных операторов, действующих из F в G обозначим $L(F, G)$. На этом множестве естественным образом вводятся операции сложения и умножения на число:

– **суммой** операторов A и B из $L(F, G)$ называется оператор $A+B$, определяемый соотношением

$$\forall x \in F : (A + B)x = Ax + Bx \quad (8)$$

– **произведением** оператора $A \in L(F, G)$ на число α называется оператор αA , определяемый соотношением

$$\forall x \in F : (\alpha A)x = \alpha(Ax). \quad (9)$$

Как легко заметить, эти операции являются обобщениями хорошо известных нам операций сложения обычных числовых функций (сложение ординат) и их умножения на число (умножение ординат на число).

Линейность операторов $A+B$ и αA проверяется без труда:

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x + \alpha' x') &= A(\alpha x + \alpha' x') + B(\alpha x + \alpha' x') = \alpha Ax + \alpha' A'x' + \alpha Bx + \alpha' Bx' = \\ &= \alpha(Ax + Bx) + \alpha'(A'x' + Bx') = \alpha(A+B)x + \alpha'(A+B)x', \\ (\beta A)(\alpha x + \alpha' x') &= \beta A(\alpha x + \alpha' x') = \beta \alpha Ax + \beta \alpha' Ax' = \\ &= \alpha(\beta Ax) + \alpha'(\beta Ay) = \alpha(\beta A)x + \alpha'(\beta A)x'.\end{aligned}$$

В частном случае, когда $F = G$, вместо $L(F, G)$ будем писать $L(F)$ и называть это множество **пространством линейных операторов в F** .

Пусть теперь заданы три векторных пространства F, G, H и два линейных оператора $A: F \rightarrow G, B: G \rightarrow H$. В этом случае определено **произведение BA операторов B и A** :

$$\forall x \in F : (BA)x = B(Ax) \quad (10)$$

Другими словами, BA – это сложная функция, составленная из функций A и B .

Функция BA есть линейный оператор, действующий из F в H . В самом деле, для любых x, x' из F и α, β из R имеем:

$$\begin{aligned}(BA)(\alpha x + \beta x') &= B(A(\alpha x + \beta x')) = B(\alpha Ax + \beta Ax') = \\ &= \alpha B(Ax) + \beta B(Ax') = \alpha(BA)x + \beta(BA)x'\end{aligned}$$

Отметим **основные свойства операции умножения линейных операторов**:

$$(AB)C = A(BC) \quad (11)$$

$$\alpha(BA) = (\alpha B)A = B(\alpha A) \quad (12)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (13)$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad (14)$$

Каждое из этих равенств имеет место всякий раз, когда участвующие в нём операторы определены.

Все равенства (11) – (14) доказываются одинаковым способом, поэтому ограничимся первым из них. Пусть даны операторы $I: F \rightarrow F, C: F \rightarrow G, B: G \rightarrow H$ и $A: H \rightarrow J$, где F, G, H и J – некоторые векторные пространства. Сначала констатируем, что $(AB)C$ и $A(BC)$ – это операторы из F в J . Для любого $x \in F$ имеем: $[(AB)C]x = (AB)Cx = A(B(Cx)) = [A(BC)]x$, что и означает выполнение равенства (11).

Важно не забывать, что умножение линейных операторов, вообще говоря, некоммутативно. Действительно, если $A \in (F, G), B \in (G, H)$, то произведение $BA: F \rightarrow H$ определено, а произведение AB – нет.

6.2. Линейные операторы в конечномерных пространствах. Умножение матриц

Пусть F_n и G_m – векторные пространства конечных размерностей n и m соответственно, и $A \in L(F_n, G_m)$. Выберем в F_n базис

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \quad (1)$$

после чего любое $x \in F_n$ можно записать через координаты в этом базисе:

$$x = \sum_{j=1}^n x_j f_j \quad (2)$$

При этом, в силу линейности оператора A , получим:

$$Ax = A \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j Af_j \quad (3)$$

Видно, что для задания линейного оператора $A: F_n \rightarrow G_m$ достаточно задать его значения на векторах некоторого базиса (1) пространства F_n .

Теперь, наряду с базисом (1) пространства F_n , зафиксируем какой-либо базис

$$g_1, g_2, \dots, g_m \quad (4)$$

в пространстве G_m . Разложим по нему каждый вектор Af_j , ($j = 1, 2, \dots, n$), т.е. запишем:

$$Af_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} g_i, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Коэффициенты a_{ij} этих разложений образуют (m, n) -матрицу, которая называется матрицей оператора A в базисах (1), (4). Она обозначается обычно той же буквой, что и оператор:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Каждый j -ый столбец этой матрицы состоит из координат вектора Af_j в базисе (4).

Итак, для фиксированных базисов (1), (4) в пространствах F_n и G_m каждому линейному оператору $A: F_n \rightarrow G_m$ по формулам (5) однозначно соответствует (m,n) - матрица.

Несложно показать, что и обратно, любая матрица пространства R^{mn} представляет при этом матрицу некоторого, единственным образом определённого, оператора из $L(F_n, G_m)$.

Следовательно, имеется взаимно-однозначное соответствие между всевозможными линейными операторами из $L(F_n, G_m)$ и всевозможными матрицами пространства R^{mn} .

Весьма важно, что при сложении операторов из $L(F_n, G_m)$ складываются соответствующие им матрицы из R^{mn} . Аналогично, при умножении оператора на число соответствующая оператору матрица умножается на это число. Эти утверждения легко проверяются с помощью формул (5).

Рассмотрим оператор $A \in L(F_n, G_m)$, имеющий матрицу (6) в базисах (1), (4). Каждый вектор x из его области определения F_n представляется в виде (2), а всякий вектор y из G_m можно выразить через его координаты так:

$$y = \sum_{i=1}^m y_i g_i \quad (7)$$

Следовательно, равенство $y = Ax$ переписывается в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i g_i &= A \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A f_j = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) g_i \end{aligned}$$

Это равносильно системе равенств:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (9)$$

Формулы (8) или (9) дают *координатное представление оператора A в выбранных базисах*.

ПРИМЕР 1. Матрица нулевого оператора $O: F_n \rightarrow G_m$ в любых базисах – это нулевая (m, n) – матрица.

В самом деле, каждый вектор базиса в F_n переводится этим оператором в нулевой вектор из G_m . Поэтому каждый столбец матрицы состоит из нулей.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим матрицу единичного оператора $I: F_n \rightarrow F_n$ в некотором базисе (1) пространства F_n (в данном случае другой базис (2) совпадает с первым). Матрица I будет единичной (n, n) – матрицей.

Действительно, каждый базисный вектор f_j имеет в базисе (1) только одну ненулевую координату, равную единице, стоящую на j -ом месте. Значит, в j -ом столбце матрицы I будет единица в j -ой строке. Все остальные элементы этого столбца – нули.

ПРИМЕР 3. Матрицей какого оператора $\Lambda \in L(F_n)$ является диагональная матрица:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – числа?

Из (8) ясно, что $y_i = \lambda_n x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т.е. действие оператора Λ сводится к «растяжению» каждой i -координаты любого вектора x в λ_i раз.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ оператор Λ оказывается просто оператором гомотетии относительно начала отсчёта с коэффициентом λ .

ПРИМЕР 4. Найти матрицу оператора поворота векторов плоскости на угол φ против часовой стрелки в декартовом правом базисе (рис. 1).

Введём полярный угол α произвольного вектора $\vec{x}$. Непосредственно из рис. 1 можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_1 &= (A\vec{x})_1 = |\vec{x}| \cos(\varphi + \alpha) = |\vec{x}| (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) = \\ &= (|\vec{x}| \cos \alpha) \cos \varphi - (|\vec{x}| \sin \alpha) \sin \varphi = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \end{aligned}$$

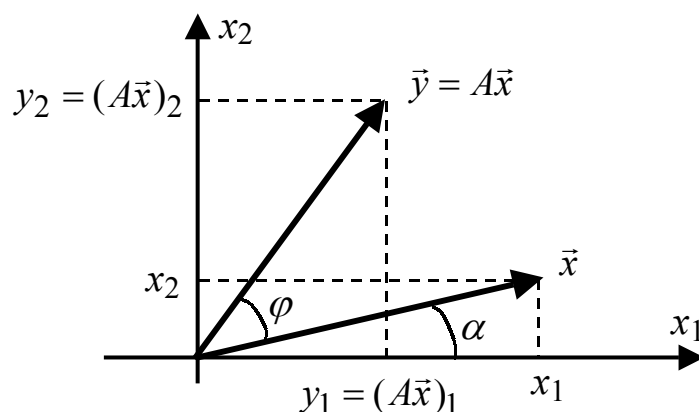


Рис. 1. Оператор поворота плоскости на угол φ .

Аналогично находим:

$$y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

Таким образом, получены формулы вида (9), и можно записать искомую матрицу оператора поворота вектора в положительном направлении на угол φ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (11)$$

Заметим, что прежде, чем говорить о матрице оператора, надо бы убедиться, что оператор линеен. Однако если удалось получить координатное представление оператора именно в виде (9), где правые части линейны относительно координат вектора x , то проверять линейность оператора уже, конечно, не надо.

ПРИМЕР 5. Являются ли линейными следующие операторы в трёхмерном пространстве?

$$Ax = (x_1^2, x_1 - x_2, x_2 + x_3),$$

$$Bx = (1, x_1 - x_2, x_2 + x_3),$$

$$Cx = (x_1, x_1 - x_2, x_2 + x_3).$$

Ясно, что здесь мы имеем дело с координатными представлениями операторов, но записанными в одну строчку. Операторы A и B не являются линейными, ибо не все координаты векторов Ax или Bx представляют собой линейные комбинации координат x_1, x_2, x_3 . Оператор C линеен.

Теперь зададимся вопросом: что происходит с матрицами линейных операторов при перемножении последних? Т.е. как получить матрицу оператора -

произведения из матриц операторов - сомножителей?

Пусть имеются конечномерные пространства F_n, G_m, H_p и два линейных оператора $A: G_m \rightarrow H_p, B: F_n \rightarrow G_m$. Зададим в F_n, G_m, H_p базисы $f_1, f_2, \dots, f_n; g_1, g_2, \dots, g_m$ и $h_1, h_2, \dots, h_p$ соответственно. Запишем матрицы операторов A и B в данных базисах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Чтобы получить матрицу оператора $C = AB: F_n \rightarrow H_p$, вычислим его значение на произвольном j -ом векторе базиса пространства F_n :

$$(AB)f_j = A(Bf_j) = A\left(\sum_{k=1}^m b_{kj}g_k\right) = \sum_{k=1}^m b_{kj}Ag_k = \sum_{k=1}^m b_{kj} \sum_{i=1}^p a_{ik}h_i, \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Изменяя порядок суммирования, заканчиваем выкладку:

$$(AB)f_j = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^p b_{kj}a_{ik}h_i = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^m b_{kj}a_{ik}h_i = \sum_{i=1}^p h_i \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}, \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Результат перепишем в виде:

$$(AB)f_j = \sum_{i=1}^p c_{ij}h_i, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

$$\text{где } c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}, \quad (i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

или, в развёрнутом виде:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} \quad (14')$$

Итак, мы нашли матрицу $C = A \cdot B$ вида $(p \times n)$ оператора AB .

Можно сказать, что *умножение операторов порождает операцию (14) умножения матриц. Эту операцию часто называют умножением матриц по правилу “строка на столбец”.*

Действительно, чтобы получить элемент c_{ij} , стоящий в i -ой строке и j -ом столбце матрицы $A \cdot B$ надо перемножить i -ую строку матрицы A на j -ый столбец матрицы B как скалярное произведение векторов в декартовых координатах.

Хотя понятие произведения операторов лежит в основе нашего определе-

ния произведения матриц, это определение можно сформулировать чисто формально – с помощью одних лишь формул (14), без всякого упоминания об операторах. Тем не менее, произведение двух матриц всегда можно рассматривать как матрицу произведения двух линейных операторов.

Из последнего факта следует, что *умножение матриц обладает свойствами (11) – (14), которые были получены, как свойства линейных операторов. Кроме того, умножение матриц, вообще говоря, некоммукативно.*

ПРИМЕР 6. Матрицу A вида 3×2 можно умножить на матрицу B вида 2×4 , как видно из (14), получится матрица вида 3×4 . А наоборот – умножить B на A нельзя. Это понятно и с операторной точки зрения и по формулам (14), которые в последнем случае просто не имеют смысла, ибо *в произведении двух матриц число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй.*

ПРИМЕР 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Этот пример показывает, что от перестановки сомножителей произведение матриц может измениться, даже если в обоих случаях произведения существуют. Этот же эффект показан и в следующем примере.

ПРИМЕР 8. Найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, где матрицы A и B имеют вид

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{а) } AB = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \quad (15)$$

В данном случае получилось число, т.е. матрица вида 1×1 .

Если положить $B = A^T$ (транспонирование), то получится

$$AA^T = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \quad (16)$$

$$\text{б) } BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \dots & b_n a_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

Получилась матрица вида $(n \times n)$.

ПРИМЕР 9 (матричная запись линейного оператора).

Вспомним координатное представление (9) линейного оператора $A: F_n \rightarrow G_m$. Если ввести матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix},$$

то формулу (9), в соответствии с определением умножения матриц, можно переписать в виде

$$Y = AX, \quad (18)$$

где A – матрица оператора.

Равенство (18) – это **матричная запись линейного оператора**. Поэтому часто говорят о применении оператора к вектору, как об умножении матрицы оператора на вектор-столбец X из координат вектора.

В завершении настоящего раздела приведём без доказательства следующее важное для приложений утверждение:

ТЕОРЕМА (об определителе произведения матриц).

Если A и B – две квадратные матрицы, то определитель их произведения равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad (19)$$

6.3. Обращение линейных операторов и матриц

В этом разделе будем рассматривать линейный оператор

$$A: F \rightarrow F, \quad (1)$$

действующий в конечномерном пространстве F размерности n . Предположим, что *отображение пространства F на себя, осуществляемое этим оператором, взаимно однозначно*. Тогда существует обратная по отношению к A функция (обратный оператор)

$$A^{-1}: F \rightarrow F \quad (2)$$

Оператор A^{-1} *линеен так же, как и A* . Покажем это.

Пусть $y, y' \in F$ и $\alpha, \beta \in R$. В силу существования обратного оператора найдутся $x, x' \in F$ такие, что $y = Ax, y' = Ax'$.

$$\text{Имеем } A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax' = \alpha y + \beta y'.$$

Следовательно, $A^{-1}A(\alpha x + \beta x') = A^{-1}(\alpha y + \beta y')$, или $\alpha x + \beta x' = A^{-1}(\alpha y + \beta y')$, или наконец $\alpha A^{-1}y + \beta A^{-1}y' = A^{-1}(\alpha y + \beta y')$, что и требовалось показать.

Если ввести в пространстве F базис и разложить по нему векторы x и y , то операторное равенство (1) запишется в виде системы уравнений с матрицей оператора A :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, существование обратного оператора A^{-1} означает, что при любом наборе правых частей система (3) имеет единственное решение.

Это, в свою очередь, возможно только в том случае, когда матрица A системы (3) невырождена, т.е. имеет определитель, отличный от нуля:

$$\det A \neq 0$$

Таким образом, *обратимость линейного оператора (1), осуществляющего взаимно однозначное отображение F на F и невырожденность матрицы этого оператора – факты эквивалентные*.

Ясно, что невырожденная матрица обратимого оператора A и матрица обратного ему оператора A^{-1} удовлетворяют соотношениям

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (4)$$

где $I: F \rightarrow F$ – тождественный оператор.

Действительно, этим соотношениям удовлетворяют сами операторы A и A^{-1} , а умножению операторов соответствует умножение матриц.

Мы видим, что задача обращения оператора естественным образом приводит к понятию обратной матрицы. Однако, это понятие можно ввести и формально, не упоминая теории операторов. Если *имеется невырожденная матрица*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

то соответствующей **обратной матрицей** называется $(n \times n)$ -матрица A^{-1} , удовлетворяющая соотношениям (4).

Покажем, что для любой невырожденной матрицы (5) существует единственная обратная матрица, и найдём явные выражения её элементов через элементы матрицы A . Обозначим элементы искомой матрицы A^{-1} через b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Тогда равенство $AA^{-1} = I$ примет вид

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Зафиксировав в (6) значение индекса j , получим систему уравнений относительно неизвестных $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$, т.е. для элементов j -го столбца матрицы A^{-1} . Решая эту систему по правилу Крамера, находим

$$b_{kj} = \frac{\Delta_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Здесь Δ_k – определитель матрицы, полученной из A после замены её k -го столбца столбцом $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}$. Раскладывая Δ_k по k -му столбцу, получаем

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} A_{ik} = A_{jk},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{jk} матрицы A . Таким образом,

$$b_{kj} = \frac{A_{jk}}{\det A}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Мы видим, что равенство $AA^{-1} = I$ однозначно определяет матрицу A^{-1} как матрицу из элементов (8) или, в развёрнутом виде:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (8')$$

ПРИМЕР 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1} .

Решение. Имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad \begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (8'):

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1} .

Решение. Имеем $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1,$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1; & A_{21} &= (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1; & A_{31} &= (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{12} &= (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38; & A_{22} &= (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41; & A_{32} &= (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34; \\ A_{13} &= (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27; & A_{23} &= (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29; & A_{33} &= (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24; \end{aligned}$$

Тогда по формуле (8') получаем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 3. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \text{const.}$$

Решение. Имеем: $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

$$A_{11} = \cos \alpha, \quad A_{21} = \sin \alpha,$$

$$A_{12} = -\sin \alpha, \quad A_{22} = \cos \alpha.$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$

Зная обратную матрицу A^{-1} , систему (3) можно решить следующим образом.

Запишем систему (3) в матричном виде:

$$A\bar{X} = \bar{Y} \tag{9}$$

где $\bar{X}, \bar{Y}$ – столбец неизвестных и столбец правых частей соответственно. Умножая равенство (9) на матрицу A^{-1} слева, получаем $A^{-1}(A\bar{X}) = A^{-1}\bar{Y}$ или $I\bar{X} = A^{-1}\bar{Y}$ или, окончательно,

$$\bar{X} = A^{-1}\bar{Y} \tag{10}$$

Решение системы (3) сводится к умножению матрицы A^{-1} на вектор-столбец правых частей. Этот метод особенно удобен, когда нужно решать системы с одной и той же матрицей A и различными наборами правых частей.

Рассмотрим обобщение только что описанного метода. Пусть дано матричное уравнение

$$AZ = B \tag{11}$$

в котором A – известная невырожденная матрица $(n \times n)$, B – известная матрица $(n \times k)$ и Z – неизвестная матрица $(n \times k)$. Умножая равенство (11) слева на матрицу A^{-1} , получаем следующее соотношение для вычисления неизвестной матрицы Z :

$$Z = A^{-1}B \tag{12}$$

ПРИМЕР 4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. Находим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ (см. пример 1).

Умножая на неё слева данное уравнение, находим

$$Z = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

В частном случае, если $B = I$ – единичная матрица $(n \times n)$, получаем из (12) равенство

$$Z = A^{-1}I = A^{-1} \quad (13)$$

Получается, что для нахождения обратной матрицы A^{-1} достаточно решить матричное уравнение $AZ = I$. Другими словами, нужно решить n линейных систем с матрицей A и правыми частями

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Это можно сделать методом Гаусса, что на практике и является основным способом вычисления обратных матриц, более экономичным, чем применение формул (8).

6.4. Преобразование координат вектора и матрицы оператора при смене базиса

Пусть задан линейный оператор $A: F \rightarrow F$, действующий в n -мерном пространстве F . Если в F задан базис, то можно использовать координатное представление оператора и свести исследование оператора к исследованию его матрицы. Однако эта матрица существенно зависит от выбора базиса, чем удачнее выбран базис, тем она проще, тем проще работа с оператором. Как выбрать удобный базис?

Для реализации правильного выбора посмотрим, как меняются координаты вектора и матрица оператора при смене базиса.

Пусть в пространстве F имеются два базиса:

$$e_1, e_2, \dots, e_n; \quad (1)$$

$$e_1', e_2', \dots, e_n'; \quad (1')$$

Каждый вектор базиса (1') можно разложить по первому базису, записав:

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n \\ &\dots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n \end{aligned} \quad (2)$$

Эти **формулы преобразования базиса** полностью определяются заданием матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

называемой **матрицей перехода от базиса (1) к базису (1')**. Каждый j -столбец этой матрицы состоит из координат вектора e'_j в базисе (1).

Базисные векторы линейно независимы, поэтому матрица перехода P невырождена. И вообще, всякая невырожденная $(n \times n)$ -матрица есть матрица перехода от заданного базиса (1) к некоторому базису (1').

ПРИМЕР 1. В двумерном векторном пространстве рассмотрим три базиса:

$$\begin{aligned} 1^{\text{й}} \text{ базис: } & e_1, e_2 \\ 2^{\text{й}} \text{ базис: } & e'_1 = e_1 + 2e_2, \quad e'_2 = 2e_1 + 3e_2 \end{aligned} \quad (*)$$

$$3^{\text{й}} \text{ базис: } e''_1 = 3e_1 + e_2, \quad e''_2 = 4e_1 + 2e_2 \quad (**)$$

Написать матрицы перехода от первого базиса ко второму, от первого к третьему и от второго к третьему.

Решение. Матрица P_{12} перехода от первого ко второму базису пишется сразу в соответствии с формулами (2) и (3):

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Точно так же пишем матрицу P_{13} перехода от первого к третьему базису:

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Что бы записать матрицу перехода от второго базиса к третьему, надо по-

лучить выражения векторов третьего базиса через первый аналогично соотношениям (2). Для этого выражаем e_1, e_2 через e'_1, e'_2 из равенств (*) и подставляем полученные выражения в (**). Это даёт

$$e_1 = -3e'_1 + 2e'_2, e_2 = 2e'_1 - e'_2$$

Подставляя эти формулы в (**), находим искомые выражения векторов третьего базиса через векторы второго:

$$e'_1 = -7e'_1 + 5e'_2, \quad e'_2 = -26e'_1 + 18e'_2$$

Теперь без труда получаем:

$$P_{23} = \begin{pmatrix} -7 & -26 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к теории. Каждый вектор $x \in F$ разлагается по любому из базисов:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i \quad (4)$$

Найдём связь между координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в базисе (1) и его координатами $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ в базисе (1'). Для этого запишем:

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i = \sum_{i=1}^n x'_i \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ji} x'_i e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ji} x'_i \right) e_j$$

Меняя обозначения индексов, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_j$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получаем

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Это – формулы преобразования координат вектора при смене базиса. Они выражают «старые» координаты (в базисе (1)) через «новые» (в базисе (1')). Если представлять координаты вектора x столбцами

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

то (5) можно представить в матричной форме:

$$X = PX' \quad (7)$$

Поскольку матрица P невырождена, существует матрица P^{-1} . Умножая на неё слева равенство (7), получаем выражение новых координат через старые:

$$X' = P^{-1}X \quad (8)$$

ПРИМЕР 2. В трёхмерном пространстве вектор $x = (1, 10, 10)$ задан в базисе e_1, e_2, e_3 . Найти его координаты в базисе

$$e'_1 = e_1 + e_2 + 11e_3, \quad e'_2 = 1,1e_1 - e_2, \quad e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

Решение. Как показывает формула (8), для решения задачи нам нужна матрица P^{-1} . Сначала находим матрицу P по формулам (3):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы можно воспользоваться формулой (8') из раздела 6.3. Но можно поступить иначе: написать выражение старых координат через новые с помощью (7), затем решить полученную систему относительно новых координат. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 1,1x'_2 - x'_3 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 + x'_3 \\ x_3 = 11x'_1 + x'_3 \end{cases}$$

Решая эту систему относительно x'_1, x'_2, x'_3 , получаем окончательно

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 1,1x_2 - 0,1x_3 \\ x'_2 &= -10x_1 - 12x_2 + 2x_3 \\ x'_3 &= -11x_1 - 12,1x_2 + 2,1x_3 \end{aligned}$$

Матрица перехода от базиса (1) к базису (2) связывает, как мы видим, два координатных описания $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ одного и того же вектора $x \in F$. Вектор неподвижен, а базисы, т.е. системы координат меняются (рис. 1).

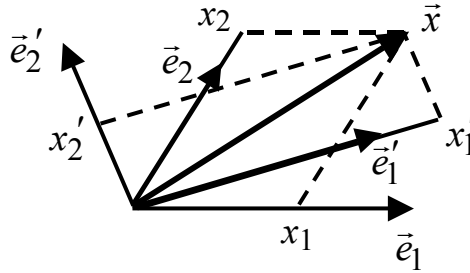


Рис. 1. Точка зрения смены базиса *alias* (другими словами – лат.).

С другой стороны, глядя на формулу (5) или (7), мы можем трактовать матрицу P как матрицу оператора, действующего в F , которая записана в базисе $(1')$. При этом вектор с координатами $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ переводится оператором P в вектор с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в том же базисе. Вектор меняется, система координат – нет (рис. 2).

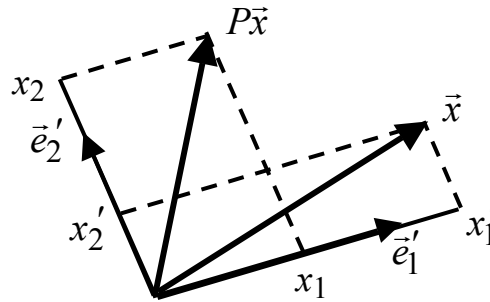


Рис. 2. Точка зрения изменения вектора *alibi* (в другом месте – лат.).

ПРИМЕР 3. Вспомним пример 4 из раздела 6.2, в котором приведена матрица оператора поворота вектора на угол φ в пространстве V_2 :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Там же на рис.1. показано действие этого оператора с точки зрения изменения вектора *alibi*.

Если взять эту же матрицу A в качестве матрицы смены базиса, то формула (7) с A вместо P даст преобразование координат вектора при повороте базиса, т.е. координатных осей на плоскости на угол φ : $X = AX'$ или

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi \\ x_2 = x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (10)$$

Чтобы получить выражение новых координат через старые, надо использовать формулу (8). Это даёт:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (11)$$

Теперь будем выяснять, как при переходе от базиса (1) к базису (1') меняется матрица оператора $A: F \rightarrow F$.

В матричной форме действие оператора A описывается равенством $Y = AX$ в старом базисе и равенством $Y' = A'X'$ – в новом. С помощью (7) и (8) представим первое равенство в виде $PY' = APX'$ и умножим слева на матрицу P^{-1} , что даёт $Y' = P^{-1}APX'$. Сравнение со вторым равенством приводит к формуле $A'X' = P^{-1}APX'$ или $A'X' = (P^{-1}AP)X'$. Поскольку X' можно выбирать произвольно, например положить $X' = I$, приходим к выводу:

$$A' = P^{-1}AP \quad (9)$$

Это и есть правило преобразования матрицы при смене базиса.

ПРИМЕР 4. В базисе e_1, e_2, e_3 задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В какую матрицу она преобразуется при переходе к базису

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = -e_1 + 2e_2 - 2e_3, \quad e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3?$$

Решение. Выписываем матрицу перехода по формулам (2), (3):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для применения правила (9) находим обратную матрицу P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь формула (9) даёт:

$$\begin{aligned}
 A' &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -3 & -1 & 15 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6.5. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Пусть $A: F \rightarrow F$ – линейный оператор, действующий в векторном пространстве F . Если существует ненулевой вектор $x \in F$ и число λ такие, что выполняется равенство

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

то вектор x называется **собственным вектором** оператора A , соответствующим **собственному значению** (или **собственному числу**) λ .

Говоря геометрическим языком, собственный вектор оператора A – это такой ненулевой вектор, который под действием оператора либо не меняет своего направления, либо меняет его на противоположное, либо обращается в ноль.

Если x и x' – собственные векторы оператора A , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то любая их линейная комбинация $\alpha x + \beta x'$ также является собственным вектором оператора A , соответствующим тому же собственному числу λ или нулём. В самом деле,

$$A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax' = \alpha \lambda x + \beta \lambda x' = \lambda(\alpha x + \beta x')$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Множество собственных векторов оператора $A: F \rightarrow F$, соответствующих фиксированному собственному числу λ , дополненное нулевым вектором, является подпространством векторного пространства F . Его называют **собственным подпространством** оператора A , соответствующим собственному числу λ .

ПРИМЕР 1. Для оператора аннулирования $A = 0$ любой вектор $x \neq 0$ яв-

ляется собственным для собственного числа λ .

Действительно, $Ax = 0(x) = 0 \cdot x$.

ПРИМЕР 2. Для единичного оператора I любой вектор $x \neq 0$ есть собственный вектор для $\lambda = 1$.

Действительно, $Ax = I(x) = 1 \cdot x = x$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оператор подобия $Ax = \alpha x$, где $\alpha \neq 0$ – фиксированное число. Отыскивая его собственные числа λ из условия (1), приходим к равенству $\alpha x = \lambda x$ или $(\alpha - \lambda)x = 0$. Ясно, что число $\lambda = \alpha$ представляет единственное собственное значение. Собственное подпространство совпадает с областью определения оператора A .

ПРИМЕР 4. Рассмотрим оператор $P: V_3 \rightarrow V_2$ проектирования геометрических векторов на плоскость Π параллельно прямой L (см. пример 5 из раздела 6.1). Чтобы найти его собственные векторы и значения, воспользуемся соотношением (1), которое даёт $P\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Левая часть этого равенства – это вектор, лежащий в плоскости Π . Значит, то же можно сказать и о правой части. Поэтому применение к правой части оператора P не меняет её, и можно записать $P\vec{x} = \lambda P\vec{x}$ или $(1 - \lambda)\vec{x} = 0$. Возможны два варианта:

- 1) $\lambda \neq 1$, значит $P\vec{x} = 0$, т.е. вектор $\vec{x}$ лежит на прямой L ;
- 2) $\lambda = 1$, значит $P\vec{x} = \vec{x}$, т.е. вектор $\vec{x}$ лежит на плоскости Π .

Итак, любое действительное число λ является собственным для оператора P . Если $\lambda \neq 1$, то соответствующим собственным подпространством является множество векторов прямой L . Если $\lambda = 1$, то собственным подпространством является множество векторов плоскости Π .

К этому же выводу можно придти и без аналитических записей, пользуясь геометрическим толкованием определения и рассматривая рис. 2 из раздела 6.1.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим оператор поворота векторов плоскости на фиксированный угол $\alpha \neq 2\pi k$ (k – целое) в этой плоскости. Ясно, что этот оператор не имеет собственных чисел.

Рассмотренные примеры показывают, что линейный оператор может вообще не иметь собственных чисел, иметь одно собственное число, несколько или даже бесконечное количество собственных чисел.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – попарно различные собственные числа линейного оператора $A: F \rightarrow F$. Выберем для каждого из них по одному собственному вектору $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ соответственно. Эта система векторов линейно независима.

Идея доказательства: Для $m = 1$ теорема очевидна, ибо всякий собственный вектор отличен от нуля. Пусть $m = 2$. Допустим, что векторы $x^{(1)}, x^{(2)}$ линейно зависимы, т.е. найдутся числа α, β , из которых хотя бы одно не равно нулю и такие, что

$$\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)} = 0 \quad (2)$$

Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Применив к (2) оператор A , получим $\alpha Ax^{(1)} + \beta Ax^{(2)} = 0$ или

$$\alpha \lambda_1 x^{(1)} + \beta \lambda_2 x^{(2)} = 0 \quad (3)$$

Теперь умножим (2) на λ_2 и вычтем результат из (3). Получим $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)x^{(1)} = 0$, откуда либо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что противоречит условию теоремы (собственные числа различны), либо $\alpha = 0$, что противоречит нашему допущению. Итак, векторы $x^{(1)}, x^{(2)}$ линейно независимы.

Пользуясь этим фактом, можно по индукции вывести из него доказательство для $m = 3$ и т.д.

Теоретические вопросы к главе 6.

1. Дать определение линейного оператора.
2. Какой оператор называется тождественным?
3. Обладает ли операция сложения операторов свойством коммутативности?
4. Обладает ли операция умножения операторов свойством коммутативности?
5. Как определяется матрица линейного оператора?
6. Какую матрицу имеет оператор поворота вектора в положительном направлении на угол φ в правом декартовом базисе?

7. Какую матрицу имеет оператор симметрии вектора относительно начала координат в декартовом базисе?
8. Какую матрицу имеет оператор симметрии вектора относительно оси OX в декартовом базисе?
9. Что происходит с матрицами линейных операторов при перемножении?
10. Сформулировать теорему об определителе произведения матриц.
11. Каким свойством обладает матрица обратного оператора?
12. Что называется матрицей перехода от одного базиса к другому?
13. Что называется собственным вектором и собственным значением линейного оператора?
14. Любой ли линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор?
15. Привести пример линейного оператора на плоскости, имеющего единственное собственное значение $\lambda = 2$.
16. Может ли линейный оператор на плоскости иметь три различных собственных значения?