

Глава 5. Измерения в векторном пространстве. Определители

5.1. Скалярное умножение геометрических векторов

Как известно, длина отрезка прямой определяется в геометрии путём сравнения его с эталоном длины – единичным отрезком. *Длиной геометрического вектора называют длину любого представляющего этот вектор вектора-отрезка.* Длину вектора $\vec{x}$ будем обозначать символом $|\vec{x}|$ (и называть также *модулем* $\vec{x}$).

Углом между отрезками AB и AC , исходящими из одной точки, называют поворот в плоскости ABC вокруг точки A , в результате которого луч AB переходит в луч AC . Ясно, что этот угол определён неоднозначно: можно поворачивать плоскость от первого отрезка до второго в двух противоположных направлениях (против и по часовой стрелке), да ещё и добавлять произвольное число полных оборотов. Угол между двумя геометрическими векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется как угол между представляющими их векторами-отрезками, отложенными из одной точки. Этот угол мы будем обозначать символом $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Рассмотрим физическую задачу. Пусть материальная точка перемещается в пространстве прямолинейно на вектор $\vec{l}$. Во время перемещения на точку действует постоянная сила, которую можно представить вектором $\vec{f}$ (направление этого вектора есть направление силы, а длина – количество единиц измерения силы). Как найти работу, совершаемую силой над движущейся точкой? Физика говорит, что эта работа выражается числом $|\vec{l}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \widehat{(\vec{l}, \vec{f})}$. Видно, что работа зависит и от длин обоих векторов (чем больше сила и чем длиннее путь, тем больше работа), и от угла между этими векторами (сила может “помогать” перемещению или “мешать” ему).

Такая мера “взаимодействия” двух векторов, объединяющая в одно число и длины векторов и угол между ними, оказывается очень удобной, как будет видно из дальнейшего, не только для вычисления работы, но и вообще в теории векторов. Поэтому вводится специальная операция над векторами – *скалярное умножение*.

Скалярным произведением геометрических векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$, или $\vec{x} \cdot \vec{y}$, или $\vec{x}\vec{y}$ и определяемое формулой

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \quad (1)$$

Отметим сразу, что, умея вычислять скалярные произведения векторов, мы фактически умеем вычислять и длины векторов и углы между ними (последние – по абсолютной величине), ибо из (1) при $\vec{y} = \vec{x}$ получается равенство $(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$, а затем и соотношения

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}}. \quad (2)$$

Имеют место следующие **основные свойства скалярного произведения**:

1. Для любого вектора $\vec{x}$: $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$; причём $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ только при $\vec{x} = \vec{0}$ (положительная определённость скалярного произведения).

2. Для любой пары векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ (коммутативность скалярного умножения).

3. Для любых трёх векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и любых двух чисел α, β :

$$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z});$$

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{z})$$

(линейность скалярного умножения по первому и по второму множителю).

Доказательство. Первые два свойства непосредственно очевидны из определения.

Для обоснования третьего заметим сначала, что при $\vec{z} = \vec{0}$ оно также очевидно. Если же $\vec{z} \neq \vec{0}$, то введём в V_3 декартов базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, чтобы единичный вектор $\vec{k}$ был направлен так же, как и вектор $\vec{z}$ (рис. 1). Разлагая любой вектор $\vec{l} \in V_3$ по такому базису, получим $\vec{l} = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k}$. С другой стороны, по определению скалярного произведения,

$$(\vec{l}, \vec{z}) = |\vec{l}| |\vec{z}| \cos \alpha = |\vec{z}| l_3.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= |\vec{z}|(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})_3 = |\vec{z}|(\alpha x_3 + \beta y_3) = \\ &= \alpha(|\vec{z}| x_3) + \beta(|\vec{z}| y_3) = \alpha(\vec{l}, \vec{x}) + \beta(\vec{l}, \vec{y}). \end{aligned}$$

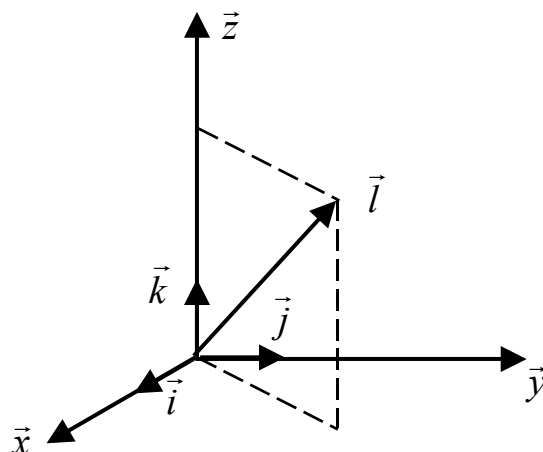


Рис. 1. К доказательству свойства 3.

Таким образом мы доказали первое равенство третьего свойства. Второе равенство получается из первого использованием коммутативности скалярного умножения.

Свойства коммутативности и линейности позволяют обычным способом раскрывать скобки при скалярном умножении линейных комбинаций и приводить подобные члены.

Отметим также, что для любой пары векторов $\vec{x}, \vec{y}$ имеет место очевидное из (1) неравенство

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|, \quad (3)$$

называемое **неравенством Коши – Буняковского**.

Векторы $\vec{x}, \vec{y}$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Из определения (1) ясно, что ортогональность векторов означает следующее: либо хоть один из них нулевой, либо они перпендикулярны друг другу.

Вектор $\vec{x}$ называется **единичным**, или **нормированным**, или **ортом**, если его длина равна единице. Другими словами, если $|\vec{x}| = 1$, или $(\vec{x}, \vec{x}) = 1$.

ПРИМЕР 1. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Вычислить

(а) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$;

(б) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

Решение. (а) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$.

$$\begin{aligned} \text{(б)} \quad (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) &= 3\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot 2\vec{b} - 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} = \\ &= 3|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 6 \cdot 3^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) - 4 \cdot 4^2 = \\ &= -10 + 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (-1/2) = -52. \end{aligned}$$

Поставим вопрос: как вычислить скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, заданных своим координатами в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$?

С помощью основных свойств скалярного произведения этот вопрос решается следующим образом. Пусть

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

Перемножим правые части этих равенств, раскрывая скобки с помощью свойства линейности, соберём подобные члены при каждом произведении базисных векторов, воспользовавшись в случае необходимости свойством коммутативности, и получим:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1y_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + (x_1y_3 + x_3y_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \\ &+ x_2y_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + (x_2y_3 + x_3y_2)\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + x_3y_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Становится ясно, что для вычисления требуемого скалярного произведения недостаточно одних координат перемножаемых векторов. Надо знать ещё и скалярные произведения всех пар базисных векторов.

Однако в важном частном случае декартова базиса эта трудность исчезает. При этом произведение базисного вектора самого на себя равно единице, а произведения различных базисных векторов равны нулю. Формула (4) принимает весьма простой вид

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3} \quad (5)$$

Полагая в этой формуле $\vec{y}$ равным последовательно каждому из векторов декартова базиса, получим следующие выражения координат вектора как его скалярные произведения на базисные векторы:

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3. \quad (6)$$

Из формулы (5) немедленно вытекает выражение длины вектора через его координаты в декартовом базисе:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (7)$$

Отсюда, в свою очередь, следует удобная формула для вычисления расстояния между двумя точками пространства E . В самом деле, пусть в E введена декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, и пусть имеются две точки из E :

$$M(x_1, x_2, x_3) \text{ и } M'(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Поскольку расстоянием между этими точками является длина вектора $\vec{MM'}$, это расстояние таково:

$$\left| \vec{MM'} \right| = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2}. \quad (8)$$

Приведённые выше рассуждения можно проводить для векторов и точек не пространства, а плоскости. Просто координат будет на одну меньше. Вместо формул (5), (7), (8) будем иметь соответственно:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2, \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \left| \vec{MM'} \right| = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2} \quad (9)$$

Наконец, то же самое можно сделать и для векторов и точек прямой, имеющих всего одну координату (которой мы не будем присваивать подстрочного индекса). Вместо (9) получим:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = xy, \quad |\vec{x}| = |x|, \quad |\vec{MM'}| = |x' - x|. \quad (10)$$

Располагая понятием скалярного умножения, мы можем заметно продвинуться в аналитическом описании прямых и плоскостей. Выведем, например, общее уравнение плоскости, не пользуясь, как в разделе 4.6, параметрическим представлением этой плоскости.

Имея плоскость Π , построим ортогональный ей вектор $\vec{n} \neq 0$, исходящий из начала отсчёта (рис. 2) и направленный в сторону плоскости.

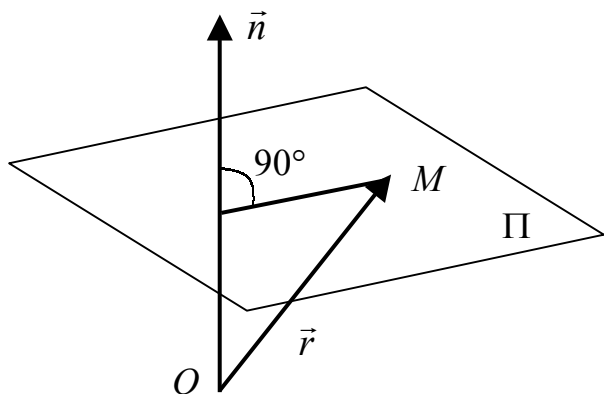


Рис. 2. К выводу общего уравнения плоскости.

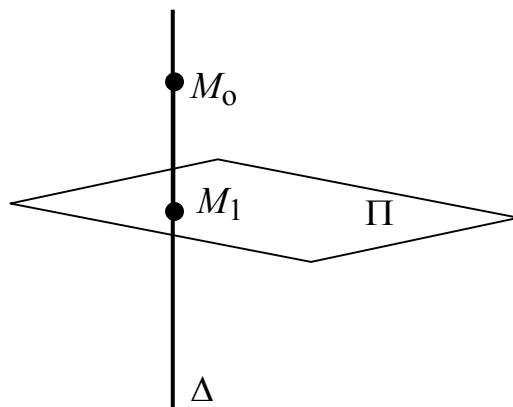


Рис. 3. К задаче о расстоянии от точки до плоскости.

Очевидно, что для всех точек M плоскости, и только для них, верно соотношение

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = D, \quad (11)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $D = \text{const}$ для данной плоскости.

Уравнение (11) и есть **общее уравнение плоскости**, записанное в **векторной форме**.

Если теперь ввести декартовы координаты x, y, z точки M и A, B, C – вектора $\vec{n}$, то можно переписать (11) в скалярной форме

$$Ax + By + Cz = D. \quad (12)$$

Это хорошо знакомое нам **общее уравнение плоскости в скалярной форме** ((3) из 4.6), которое было получено в произвольной аффинной системе координат. Однако, теперь мы знаем, что, в случае декартовых координат, коэффициенты A, B, C этого уравнения являются координатами некоторого вектора, перпендикулярного плоскости Π и направленного от начала координат в сторону этой плоскости.

Заметим, что если плоскость Π проходит через начало координат, направление “от начала координат к плоскости” не определено. Поэтому вектор $\vec{n}$ может иметь любое из двух перпендикулярных плоскости направлений.

Используем новую информацию для решения некоторых задач.

ПРИМЕР 2. Написать в декартовых координатах общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 0, -2)$ и перпендикулярной вектору $\{-2, -2, -1\}$.

Решение. Координаты данного вектора можно взять в качестве коэффициентов A, B, C искомого уравнения, которое, следовательно, имеет вид $-2x - 2y - z = C$. Константу C находим из условия принадлежности точки искомой плоскости, которое приводит к равенству $-2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = C$ или $C = 0$. Окончательно: плоскость имеет уравнение $2x + 2y + z = 0$.

ПРИМЕР 3. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z = 7$ и $x + y = 35$.

Решение. Ясно, что угол α между данными плоскостями равен углу между векторами $\{1, 2, -2\}$ и $\{1, 1, 0\}$, которые, соответственно, перпендикулярны этим плоскостям. Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{а значит } \alpha = \pi/4.$$

ПРИМЕР 4. Даны плоскость Π с уравнением (12) и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Найти расстояние от точки до плоскости.

Решение. Построим прямую Δ , проходящую через точку M_0 и ортогональную плоскости (рис. 3). Очевидно, её параметрическое представление есть

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n}, \quad (13)$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки M_0 . Найдём точку пересечения M_1 прямой Δ и плоскости Π . Для этого надо подставить (13) в (11), что даёт последовательно:

$$(\vec{r}_0 + t\vec{n}) \cdot \vec{n} = D, \quad t = \frac{D - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}, \quad \text{а затем}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{n} \frac{D - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{n} \frac{D - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}. \quad (14)$$

Теперь искомое расстояние d выглядит так:

$$d = |\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - D|}{|\vec{n}|}. \quad (15)$$

В декартовых координатах получаем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (16)$$

Из формулы (14) следует, что, если число

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D$$

положительно, то точка M_0 расположена с той же стороны от плоскости, в которую направлен вектор $\{A, B, C\}$, если оно отрицательно, то – с противоположной. Если это число равно нулю, то M_0 лежит на плоскости.

ПРИМЕР 5. На плоскости даны прямая Δ с уравнением $Ax + By = C$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. Найти расстояние от точки до плоскости.

В векторной форме эта задача решается точно так же, как предыдущая. Вся разница состоит в том, что в скалярных формулах присутствуют не три, а две координаты. Поэтому результаты выглядят так:

Искомое расстояние равно (по аналогии с (16))

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (17)$$

Если число $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - D = Ax_0 + By_0 - C$ положительно, то точка M_0 расположена с той же стороны от прямой, в которую направлен вектор $\{A, B\}$; если оно отрицательно, то – с противоположной. Если это число равно нулю, то M_0 лежит на прямой.

Картинки, аналогичные рис. 2,3 упрощаются и принимают, соответственно, вид (рис.4):

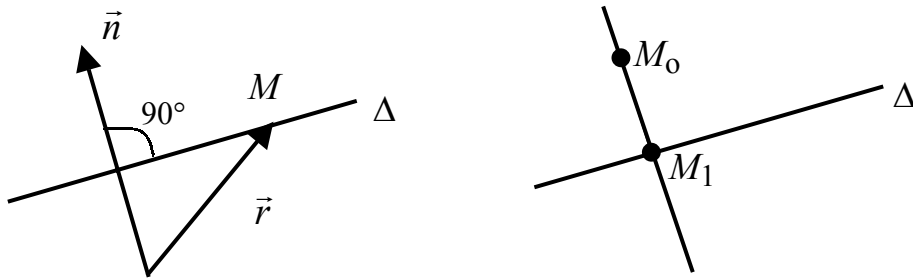


Рис. 4. К примеру 5.

5.2. Ориентация в пространстве. Векторное умножение геометрических векторов. Смешанное умножение

Если вы можете передвигаться только по фиксированной прямой в пространстве, например по автодороге без ответвлений, то свобода вашего передвижения сводится только к выбору одного из двух противоположных направлений. Их надо различать, например назвав одно из направлений *положительным*, другое – *отрицательным*. Положительное направление можно зафиксировать, задав, например, какой-либо ненулевой вектор $\vec{e}$ прямой, имеющий именно это направление и известный в любой точке прямой. Тогда любого, кто хочет куда-то попасть, двигаясь по прямой, можно сориентировать – куда ему двигаться – по вектору или против.

Отсюда определение: говорят, что всякий базис $\vec{e}$ одномерного пространства геометрических векторов V_1 задаёт **ориентацию** в этом пространстве. Любой вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ из V_1 называется при этом **положительно ориентированным**, если он направлен в ту же сторону, что и $\vec{e}$, и **отрицательно ориентированным** в противоположном случае.

Если вы можете передвигаться только по фиксированной плоскости в пространстве, то выбор какого-либо направления движения из всех возможных в данной точке, т.е. какого либо ненулевого вектора $\vec{e}_1$, лежащего в данной плоскости, недостаточен для реализации вашей свободы передвижения: ориентируясь только по нему, вы будете вынуждены двигаться только по прямой. Чтобы отклониться от неё, надо выбрать – в какую сторону от направления вектора $\vec{e}_1$, т.е. выбрать положительную сторону отклонения. Для этого достаточно добавить к $\vec{e}_1$ какой-либо не коллинеарный ему вектор вашей плоскости $\vec{e}_2$.

Отсюда определение: говорят, что всякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ двумерного пространства геометрических векторов задаёт **ориентацию** в этом пространстве. Любая упорядоченная пара $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ неколлинеарных векторов из V_2 называется при этом **положительно ориентированной**, если кратчайший поворот от $\vec{x}_1$ к $\vec{x}_2$ в плоскости происходит в том же направлении, что и кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$, и **отрицательно ориентированной** – в противном случае.

Иногда ориентацию на плоскости задают выбором положительного направления вращения плоскости в себе – с помощью терминов “против (или по) часовой стрелки”. Но с этим способом надо обращаться осторожно: в зависимости от того, с какой стороны мы смотрим на плоскость, один и тот же её поворот будет происходить как против часовой стрелки, так и по её движению. Поэтому указанный способ можно применять только в случае, когда известно, с какой стороны смотрят на плоскость. При этом базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ обычно называют **правым**, если кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ происходит против часовой стрелки, и **левым** – в противном случае.

Если вы можете свободно перемещаться в пространстве, то двух векторов уже недостаточно, поскольку, кроме понятий “вперёд-назад”, “направо-налево” появляются понятия “вверх-вниз”.

Отсюда определение: говорят, что всякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ трёхмерного пространства геометрических векторов V_3 задаёт **ориентацию** в этом пространстве. Этот базис называют **правым**, если кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ в плоскости этих двух векторов, рассматриваемый со стороны вектора

$\vec{e}_3$, происходит против часовой стрелки (как на рис.1), и **левым** – в противном случае. Любая упорядоченная тройка $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ некопланарных векторов из V_3 называется при этом **положительно ориентированной**, если она и базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ одновременно правые или одновременно левые. В противном случае эта тройка **отрицательно ориентирована**.

Мы можем сказать, что задание базиса в пространстве геометрических векторов не только позволяет переходить от векторов к их координатам, но и фиксирует ориентацию в пространстве.

Ближайшее использование понятия ориентации в нашем курсе связано с операцией **векторного умножения** геометрических векторов. Важность этой операции, в частности, обуславливается её физическими применениями. Например: нахождение момента силы относительно точки; силы, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле; скорости точки твёрдого тела с заданной угловой скоростью вращения – сводятся к вычислению векторных произведений.

Итак, пусть в пространстве V_3 геометрических векторов задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. **Векторным произведением** двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V_3$ называется вектор, обозначаемый $\vec{x} \times \vec{y}$ или $[\vec{x}, \vec{y}]$ и определяемый следующими условиями:

- (а). $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \left| \sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \right|$, т.е. длина вектора $\vec{x} \times \vec{y}$ определяется тем же числом, что и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$.
- (б). Вектор $\vec{x} \times \vec{y}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.
- (в). Тройка векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ положительно ориентирована по отношению к базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 1).

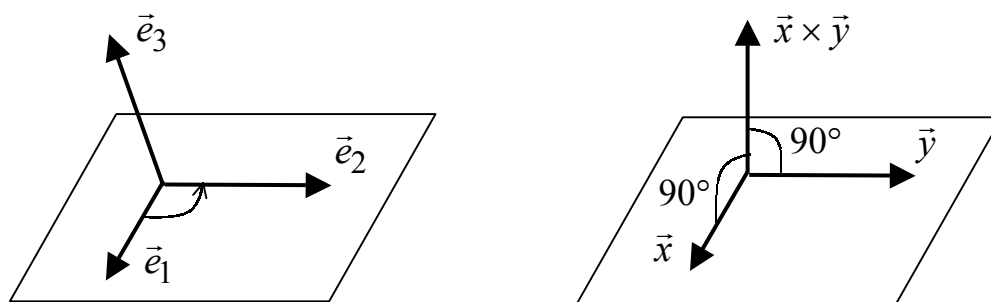


Рис. 1. К определению векторного произведения.

Обратим внимание на то, что векторное произведение можно определить только при задании ориентации в пространстве. При смене ориентации на противоположную, направление векторного произведения двух фиксированных векторов также меняется на противоположное.

Отметим основные свойства векторного умножения.

1. $\vec{x} \times \vec{x} = 0$.
2. $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}$ (**антикоммутативность** векторного умножения).
3. $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \times \vec{z} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z}) + \beta(\vec{y} \times \vec{z})$, где α и β — числа (**линейность** векторного умножения **по первому множителю**).

Свойство 1 вытекает из того, что $\sin(\widehat{\vec{x}, \vec{x}}) = 0$. Свойство 2 — следствие пункта (б) определения векторного произведения. Свойство 3 примем без доказательства ввиду громоздкости последнего. Заметим сразу, что из 3 и 2 вытекает линейность векторного произведения и по второму множителю:

$$\vec{z} \times (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha(\vec{z} \times \vec{x}) + \beta(\vec{z} \times \vec{y}).$$

ПРИМЕР 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = 3\pi/4$.

Решение. Из определения векторного произведения следует, что искомая площадь есть $|\vec{a} \times \vec{b}|$. С помощью свойств 1–3 имеем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{p} + 2\vec{q}) \times (2\vec{p} - \vec{q}) = 6(\vec{p} \times \vec{p}) + 2(\vec{q} \times \vec{p}) - 3(\vec{p} \times \vec{q}) - 2(\vec{q} \times \vec{q}) = \\ &= -5(\vec{p} \times \vec{q}) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } |\vec{a} \times \vec{b}| = 5|\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \left| \sin(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) \right| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \sin \frac{3\pi}{4} = 60 \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2}.$$

Значит искомая площадь равна $30\sqrt{2}$.

Предположим теперь, что два вектора заданы своими координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

Как вычислить координаты вектора $\vec{x} \times \vec{y}$?

Ответ на этот вопрос получается с помощью определения и основных свойств 1–3 векторного произведения. А именно, раскрывая скобки, получаем:

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} &= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = \\ &= x_1y_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1y_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &+ x_2y_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + x_2y_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + x_2y_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &+ x_3y_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + x_3y_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + x_3y_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3).\end{aligned}$$

Затем используем соотношения

$$\begin{aligned}\vec{e}_i \times \vec{e}_i &= 0, & \text{для любого } i; \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= -\vec{e}_j \times \vec{e}_i, & \text{при } i \neq j,\end{aligned}$$

и приведём подобные члены. Получим тогда

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} &= (x_1y_2 - x_2y_1)(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (x_2y_3 - x_3y_2)(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &+ (x_3y_1 - x_1y_3)(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1).\end{aligned}\tag{1}$$

Дальнейшее продвижение возможно только тогда, когда известны все парные векторные произведения базисных векторов друг на друга.

Именно такая ситуация имеет место в важном частном случае, когда базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ декартов и правый. При этом, как легко сообразить, справедливы равенства

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

В результате формула (1) принимает значительно более простой вид:

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3}\tag{2}$$

Эту формулу удобно переписать, используя понятие определителя:

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

ПРИМЕР 2. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в декартовом правом базисе, если он перпендикулярен векторам $\vec{a} \{2, -3, 1\}$ и $\vec{b} \{1, -2, 3\}$, а также удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3) = 10$.

Решение. Ясно, что искомый вектор коллинеарен векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, которое имеет, в силу формулы (2), координаты $\{-7, -5, -1\}$. Следовательно, $\vec{x}\{-7c, -5c, -c\}$, где c — число, которое легко определить, подставляя $\vec{x}$ в последнее условие задачи. Это даёт:

$$-c(7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3)(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3) = 10,$$

или
$$-c[7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-7)] = 10,$$

откуда $c = -1$ и $\vec{x}\{7, 5, 1\}$.

Введём ещё один вид умножения векторов. На этот раз пусть даны три вектора $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_3$. Число $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ называется **смешанным произведением** этих векторов и обозначается обычно символом $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Приведём основные свойства смешанного умножения.

1. Модуль смешанного произведения $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, отложенных от общего начала. Число $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ положительно или отрицательно в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирована тройка векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

2. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ линейно зависимы (компланарны) тогда и только тогда, когда $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$.

3. В ортонормированном правом базисе смешанное произведение векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ имеет вид:

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3.$$

4. Смешанное умножение линейно по каждому множителю. Например,

$$(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}) = \alpha (\vec{x}, \vec{z}, \vec{u}) + \beta (\vec{y}, \vec{z}, \vec{u}).$$

5. При перестановке двух множителей смешанное произведение меняет знак на противоположный:

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}).$$

Все перечисленные свойства легко выводятся из определения смешанного умножения. Мы оставляем их выводы читателю в качестве упражнений.

5.3. Определители

Пусть в одномерном пространстве геометрических векторов V_1 задана ориентация. **Определителем**, или **ориентированной длиной** вектора $\vec{x} \in V_1$ называется число, равное его длине или противоположное ей по знаку, соответственно тому, положительна или отрицательна ориентация $\vec{x}$.

Если ориентация задана базисом $\vec{e}$ таким, что $|\vec{e}| = 1$, то $\vec{x} = x\vec{e}$, и определитель вектора $\vec{x}$ – это его координата x в базисе $\vec{e}$.

Пусть в двумерном пространстве V_2 задана ориентация. **Определителем**, или **ориентированной площадью** системы двух векторов $\vec{x}, \vec{y}$ из V_2 называется площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}$ или число, противоположное этой площади по знаку, соответственно тому, положительна или отрицательна ориентация пары векторов $\vec{x}, \vec{y}$.

Предположим, что ориентация V_2 задана ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Разложим векторы $\vec{x}, \vec{y}$ по этому базису:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2.$$

Введём вектор $\vec{e}_3$ единичной длины, ортогональный векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и образующий вместе с ними правую тройку $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вычисляя векторное произведение $\vec{x} \times \vec{y}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, видим, что определитель системы $\vec{x}, \vec{y}$ – это число $x_1y_2 - x_2y_1$.

Пусть в трёхмерном пространстве V_3 задана ориентация. **Определителем**, или **ориентированным объёмом** системы векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ из V_3 называется объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, или число, противоположное по знаку этому объёму, соответственно тому, положительна или отрицательна ориентация тройки векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Пусть ориентация в V_3 задана ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Разложим $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ по этому базису:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \\ \vec{y} &= y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3, \\ \vec{z} &= z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Определитель системы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ совпадает, очевидно, со смешанным произведением этих векторов, т.е. с числом

$$x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.$$

При наличии базиса задание системы векторов означает задание координат этих векторов. В случае V_1 вектор $\vec{x}$ задаётся своей единственной координатой x или квадратной матрицей (x) вида 1×1 . В случае V_2 система векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ задана наборами координат (x_1, x_2) , (y_1, y_2) или матрицей вида 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

В случае V_3 система векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ задаётся наборами координат (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) , (z_1, z_2, z_3) или квадратной матрицей вида 3×3 :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если ортонормированный базис в V_1 , или в V_2 , или в V_3 задан, то можно сказать, что определитель – это число, которое ставится в соответствие не системе векторов, а квадратной матрице. Если обозначить матрицу буквой A , то соответствующий ей определитель обозначается обычно $\det A$, от слова *determinant* (лат.) – определитель, определяющий. Часто определитель обозначают по-другому: выписывают таблицу чисел, образующую матрицу A , обрамляя её прямыми линиями. Правда, в случае $n=1$ это обозначение не применяется, чтобы не спутать с обозначением модуля числа.

Итак,

$$\det(a) = a \tag{1}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad (3)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Эти формулы служат определениями **определителей матриц 1-го, 2-го и 3-го порядка соответственно**. В них понятие вектора не фигурирует. Тем не менее, мы можем, при необходимости, трактовать строки матрицы, как координаты векторов в некотором ортонормированном базисе. Тогда определитель даёт ориентированный объём соответствующей системы векторов.

Чтобы запомнить формулы (2), (3) вычисления определителей, удобно пользоваться следующими мнемоническими правилами: надо брать произведения элементов матрицы, соединённых сплошными линиями на приводимых диаграммах, со знаком «+», а произведения элементов, соединённых пунктиром, со знаком «-». Сумма произведений и даст значение определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(— = +, - - - = -)

Последнее правило называется **правилом Саррюса**.

Понятие определителя матрицы, как мы увидим далее, оказывается очень удобным для решения многих задач. Поэтому хотелось бы обобщить его для случая квадратной матрицы произвольного порядка $n > 3$. Но мы не располагаем понятием объёма в четырёхмерном, пятимерном и т.д. пространствах. Поэтому избираем иной путь.

Заметим, что формулы (1) – (3) позволяют написать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}), \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
(5)

Мы видим, что определитель порядка 2 или 3 выражается через элементы своей первой строки и через определители на порядок меньше. Эти выражения можно положить в основу *рекуррентного* определения определителя произвольного порядка n . Пусть дана квадратная $n \times n$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
(6)

и пусть понятие определителя матрицы $(n-1) \times (n-1)$ известно. **Определителем матрицы A** называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\
\dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$
(7)

Формула (7) даёт определение определителя любого порядка n с помощью **разложения определителя по первой строке**.

Рассмотрим основные свойства определителей.

Теорема 1. Определитель единичной матрицы равен единице:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (8)$$

Доказательство основано на последовательном применении формулы (7).

Теорема 2. Если поменять местами две строки определителя, он изменит знак на противоположный.

Доказательство для $n = 2$ и $n = 3$ следует из формул (4), (5).

Переход от $n = 3$ к $n = 4$ и так далее получается опять-таки с помощью (7).

Следствие. Определитель, две строки которого совпадают, равен нулю.

В самом деле, обозначив такой определитель через D , сравним его с определителем $(-D)$, полученным перестановкой указанных в теореме строк. Это даст $D = -D$, откуда $D = 0$.

Теорема 3. Пусть некоторая i -ая строка определителя D порядка n имеет вид: $\alpha a_{i1} + \beta b_{i1}, \alpha a_{i2} + \beta b_{i2}, \dots, \alpha a_{in} + \beta b_{in}$, где α, β – числа. Тогда определитель D имеет вид: $D = \alpha D_1 + \beta D_2$, где D_1, D_2 – определители, у которых i -ые строки равны соответственно $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ и $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$. Любая другая строка у всех трёх определителей D, D_1, D_2 одинакова.

Указанное свойство называется **линейностью определителя по i -ой строке**. Например, линейность по первой строке записывается так:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \dots & \alpha a_{1n} + \beta b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \quad (9)$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство. Формула (9) для первой строки сразу получается, если воспользоваться определением (7). Линейность по любой другой строке получается из линейности по первой строке с помощью предыдущей теоремы.

Теорема 4. Если строки определителя линейно зависимы как векторы из $\mathbb{R}^n$, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть, например, первая строка определителя матрицы (6) есть линейная комбинация остальных строк:

$$(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}) = \sum_{i=2}^n \alpha_i (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}).$$

Пользуясь свойством линейности по первой строке, представим наш определитель в виде

$$\det A = \sum_{i=2}^n \alpha_i \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Каждый определитель в правой части содержит, очевидно, две одинаковых строки, и, следовательно, равен нулю. Поэтому $\det A = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Определитель матрицы, строка которой состоит из нулей, равен нулю.

Следствие 2. При добавлении к некоторой строке матрицы линейной комбинации других её строк значение определителя не меняется.

Обоснование следствий предоставляется читателю.

Продолжим изучение свойств определителей. Пусть A – матрица размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Транспонировать матрицу A – значит перейти к матрице размера $n \times m$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

строки которой являются столбцами матрицы A .

Теорема 5. *Определитель квадратной матрицы не меняется при её транспонировании, т.е.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A^T \quad (12)$$

Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы ввиду его громоздкости. Однако, для случаев $n = 1, 2, 3$ формула легко проверяется с помощью (1) – (3).

Следствие. *Все свойства, сформулированные по поводу строк определителя, справедливы и для столбцов.*

Перечислим эти свойства:

– *Определитель матрицы A можно разложить по первому столбцу:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad (13)$$

- Если поменять местами два столбца матрицы, то её определитель изменит знак на противоположный.
- Определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.
- Определитель линеен по каждому своему столбцу.
- Если столбцы матрицы линейно зависимы как векторы из $\mathbb{R}^n$, то её определитель равен нулю.
- Определитель матрицы, содержащей столбец нулей, равен нулю.
- При добавлении к некоторому столбцу матрицы линейной комбинации других столбцов значение определителя не меняется.

Рассмотрим произвольную матрицу A вида $m \times n$. Выделим в ней k строк ($k \leq m$, $k \leq n$) и столько же столбцов. Элементы матрицы A , стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу вида $k \times k$. Её определитель называется **минором k -го порядка матрицы A** . В частности, каждый элемент a_{ij} матрицы – это один из её миноров первого порядка.

Пусть A – квадратная матрица вида $n \times n$. Зафиксируем один из её элементов a_{ij} . Минор M_{ij} порядка $n-1$, соответствующий всем строкам матрицы, кроме i -ой и всем столбцам матрицы, кроме j -го, называется **дополнительным** по отношению к элементу a_{ij} .

Число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (14)$$

называется **алгебраическим дополнением**, или **адьюнктом** элемента a_{ij} матрицы A .

Теорема 6. Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$ с элементами a_{ij} , зафиксируем некоторую её i -ую строку. Определитель матрицы равен сумме произведений всех элементов этой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (15)$$

Доказательство. Для $i = 1$ эта теорема уже известна (см. формулу (7)). Пусть теперь $i > 1$. Поменяем местами i -ую строку с $(i-1)$ -ой, затем $(i-1)$ -ую с $(i-2)$ -ой и т.д., наконец вторую строку с первой. Вместо $\det A$ получим новый определитель, равный $(-1)^{i-1} \det A$. Разложим его по формуле (7):

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1} \det A &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = \\ &= a_{i1} M_{i1} - a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{n-1} a_{in} M_{in}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

Следствие. Аналогичная теорема имеет место и для столбцов:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad (16)$$

Теорема 7. Сумма произведений элементов некоторой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, \quad i \neq k. \quad (17)$$

(Доказать самостоятельно!)

Обсудим теперь вопрос о практическом вычислении конкретных определителей. Если порядок определителя больше трёх, то у нас нет готовых формул типа (2) или (3). Естественная мысль – воспользоваться рекуррентным определением (7), последовательно понижая порядок подлежащих вычислению определителей.

Однако использование только рекуррентного определения может привести к катастрофически сложным вычислительным трудностям, особенно для определителей высокого порядка.

Действительно, пусть порядок определителя равен n . Выражая его по определению (7) через определители порядка $n-1$, получаем n слагаемых. Каждое из них содержит определитель порядка $n-1$, разложение которого даёт, в свою очередь, $n-1$ слагаемое. В результате выражение исходного определителя через определители порядка $n-2$ даёт $n(n-1)$ слагаемых. Если продолжать подобную процедуру понижения порядка до определителей 1-го порядка, т.е. чисел, то получится сумма $n!$ слагаемых. Каждое из них есть произведение n чисел. Итого, для вычисления исходного определителя потребуется порядка $n! \cdot n$ арифметических операций. Пусть, например, $n = 20$. Тогда компьютеру, выполняющему миллион операций в секунду, потребуется более полутора миллионов лет на вычисление определителя!

С другой стороны, приложения теории определителей зачастую требуют вычисления определителей значительно большего порядка, чем 20. Поэтому, прежде, чем применять определение (7), или, что сводится к тому же, разлагать определитель по строке или столбцу, надо попытаться максимально упростить его. А именно, с помощью полученных выше свойств надо преобразовать определитель так, чтобы как можно большее число его элементов стали нулями. Тогда последующие разложения по строке или столбцу станут намного проще.

Поясним сказанное примерами.

ПРИМЕР 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 1-го столбца 4-ый, затем в полученном определителе прибавим 4-ую строку к 1-ой:

$$\Delta \stackrel{1^{ст\ столб} - 4^{ст\ столб}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{1^{ст\ строка} + 4^{ст\ строка}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

Теперь добавим к 4-ой строке 1-ую, затем из 1-ой строки вычтем семь 2-ых:

$$\Delta \stackrel{4^{ст\ строка} + 1^{ст\ строка}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{1^{ст\ строка} - 7 \cdot 2^{ст\ строка}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -14 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & 7 \\ 11 & -8 & -2 \end{vmatrix}$$

Теперь уже можно вычислить определитель по правилу Саррюса. Но, пожалуй, проще добавить к 1-ой строке сумму 2-ой и 3-ей, а затем разложить полученный определитель по первой строке:

$$\Delta \stackrel{1^{ст\ строка} + 2^{ст\ строка} + 3^{ст\ строка}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \\ 11 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 2(-6 + 56) = 100.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить определитель $\Delta =$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 6-ой строки 5-ую, из 5-ой строки – 4-ую и т.д., наконец из 2-ой 1-ую. Затем вычтем 6-ую строку из 1-ой, 2-ой, ..., 5-ой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6^{ay}-5^{ay} \\ \\ \\ 5^{ay}-4^{ay}, \dots \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^{ay}-6^{ay} \\ \\ \\ 2^{ay}-6^{ay}, \dots \end{matrix}$$

Разложим теперь определитель Δ по 1-му столбцу, затем вынесем общий множитель 6 из 2-ой, 3-ей, 4-ой и 5-ой строк, потом прибавим к 1-му столбцу остальные и, наконец, снова разложим Δ по 1-му столбцу:

$$\Delta = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6^4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -6^4 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6^4 \cdot 21 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь всё просто. Последовательные разложения по 1-ой строке дают:

$$\Delta = -6^4 \cdot 21 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6^4 \cdot 21 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6^4 \cdot 21 \cdot (-1) = -27216.$$

5.4. Приложения теории определителей к изучению матриц и систем линейных уравнений

5.4.1. Ранг матрицы

Рассмотрим (m, n) -матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Если не все элементы этой матрицы равны нулю, то **рангом** этой матрицы называется максимальный порядок её отличных от нуля миноров.

Например, если в матрице имеется минор 3-го порядка, отличный от нуля, а все миноры порядка 4 и выше равны нулю, то ранг матрицы равен 3.

Если все элементы матрицы A – нули, то её ранг, по определению, равен нулю.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $\text{rang } A$.

Любой, не равный нулю, минор порядка, совпадающего с рангом $\text{rang } A$ матрицы A , называется **базисным минором** матрицы A . Строки (столбцы) матрицы A , в которых расположен базисный минор, называются **базисными строками (столбцами)** этой матрицы. Следующая теорема фактически даёт ещё одно, эквивалентное предыдущему, определение ранга матрицы.

Теорема 1. Ранг (m, n) -матрицы (1) совпадает с максимальным числом её линейно независимых (как векторы из $\mathbb{R}^n$) строк. Аналогичное утверждение верно и для столбцов (как векторов из $\mathbb{R}^m$). Тем самым максимальное число линейно независимых строк и максимальное число линейно независимых столбцов матрицы совпадают.

Мы примем эту теорему без доказательства.

Как практически вычислить ранг конкретной матрицы? Рассмотрим, без доказательств, два наиболее употребительных метода.

Метод окаймления. Пусть в матрице найден минор M порядка k , отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M . Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдётся ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.

ПРИМЕР 1. Методом окаймления найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первый же минор 1-го порядка этой матрицы, т.е. элемент $a_{11}=2$ не равен нулю. Значит, $\text{rang } A \geq 1$. Этот минор окаймляют следующие миноры 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первый из них равен нулю, второй – нет:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$$

Значит, $\text{rang } A \geq 2$. Осталось рассмотреть миноры 3-го порядка, окаймляющие

минор $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, т.е. миноры: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Читатель легко проверит, что первый из этих определителей равен нулю, а второй – нет. Теперь вычисления можно закончить, поскольку миноров четвертого порядка у матрицы не существует вовсе, и $\text{rang } A = 3$.

ПРИМЕР 2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$

Снова, как и выше, видим, что $a_{11} = 2 \neq 0$, и окаймляющий этот элемент минор

2-го порядка $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -28 + 40 = 12$ отличен от нуля. Выпишем окаймляющие

его миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 8 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 8 & -7 & 2 \\ 4 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 8 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 8 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 8 & 6 & -7 \\ 8 & 6 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 8 & -7 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 8 & -7 & 2 \\ 8 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

Можно заметить, что 1-ый, 2-ой, 4-ый, 5-ый, 7-ой и 8-ой определители равны нулю, т.к. содержат пропорциональные столбцы. Оставшиеся три минора также равны нулю, что проверяется непосредственным вычислением. Итак, все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, и $\text{rang } A = 2$.

Переходим ко второму методу вычисления ранга матрицы – **методу элементарных преобразований матрицы**.

Назовём элементарными преобразованиями матрицы следующие операции:

- а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;
- б) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- в) прибавление к некоторой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) матрицы.

Каждое из этих преобразований не меняет ранга матрицы. В самом деле, ясно, что при любом элементарном преобразовании всякий ненулевой минор матрицы остаётся ненулевым, а всякий нулевой – нулевым.

Дадим ещё одно определение: матрица называется **диагональной**, если равны нулю все её элементы, кроме, быть может, диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$.

Так вот, элементарными преобразованиями можно привести всякую матрицу (1) к диагональному виду, причём такому, что ненулевые элементы главной диагонали будут единицами, расположенными в нескольких первых строках матрицы.

Ясно, что у такой диагональной матрицы ранг равен числу упомянутых единиц.

Поясним схему применения метода элементарных преобразований примерами.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим матрицу из примера 1 и вычислим её ранг методом элементарных преобразований.

Поскольку каждое такое преобразование, не меняя ранга матрицы, меняет саму матрицу, мы будем использовать в наших выкладках вместо знака равенства между матрицами знак « $\sim$ » (эквивалентность матриц в смысле равенства их рангов).

Итак, вычтем из 1-ой строки данной матрицы 3-ю, после чего из 2-ой строки вычтем удвоенную 3-ю, что даёт:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^{ая} - 3^{ая}, 2^{ая} - 2 \cdot 3^{ая}} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к 1-му, 3-му, 4-му и 5-му столбцам 2-ой, умноженный соответственно на 2, 1, 3, 2; получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1^{iii}+2 \cdot 2^{oi}, 3^{iii}+2^{oi} \\ 4^{iii}+3 \cdot 2^{oi}, 5^{iii}+2 \cdot 2^{oi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-го столбца 5-ый, затем разделим 2-ой столбец на -1 , а 4-ый столбец – на -5 :

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 2-ой строки 1-ую, затем из 5-го столбца – удвоенный 4-ый:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, поменяем местами 4-ый и 1-ый столбцы, 2-ой и 5-ый, затем 3-й и 5-ый:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к диагональному виду, её ранг равен 3 (как и в примере 1).

ПРИМЕР 4. Вычислим методом элементарных преобразований ранг матрицы из примера 2. Для этого разделим её 1-ый столбец на 4, 2-ой на 3, 4-ый на 2. Затем вычтем 1-ый столбец из 2-го и 4-го. После этого вычтем 1-ую строку из 2-ой и 5-ой:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Разделим 4-ю строку на 2, а 5-ю на 3. Далее, вычтем 2-ю строку из 4-ой и 5-ой и добавим её же к 3-ей:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим 1-ый столбец, умноженный на 5, к 3-му, затем его же, умноженный на 3, вычтем из 5-го. Потом разделим 3-ый столбец на 3, а 5-ый – на (-4) . После этого вычтем 3-ий столбец из 5-го:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, поменяв местами 2-ой и 3-ий столбцы, приведём матрицу к диагональному виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы A равен 2, в полном соответствии с примером 2.

5.4.2. Критерий совместности системы линейных уравнений

Мы уже знакомы с методом Гаусса исследования системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (2)$$

который, в частности, даёт ответ на вопрос о её совместности, т.е. о наличии у системы хотя бы одного решения. Однако, часто бывает удобнее решать этот

вопрос другим способом, сравнивая ранги матрицы A и расширенной матрицы $A|Y$ системы (2). Напомним, что эти матрицы имеют вид (1) и

$$A|Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Теорема 2 (Кронекера – Капелли). Для совместности системы (2) необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A и $A|Y$ совпадали, т.е.

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|Y). \quad (4)$$

Доказательство. Запишем систему (2) в виде

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = Y \quad (5)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

Если система (2) совместна, то вектор Y есть линейная комбинация векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тем самым, все столбцы матрицы $A|Y$ линейно выражаются через базисные столбцы матрицы A , а значит эти последние являются базисными и для матрицы $A|Y$, т.е. имеет место равенство (4).

Обратно, пусть верно равенство (4). Тогда базисные столбцы матрицы A являются базисными и для матрицы $A|Y$. Значит, столбец Y линейно выражается через эти столбцы и, тем самым, через все столбцы матрицы A . Другими словами, существует набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такой, что верно равенство (5). Система (2) совместна.

5.4.3. Крамеровские системы уравнений

Рассмотрим случай системы с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (7)$$

и предположим, что матрица системы **невыврождена**, т.е. что

$$\Delta = \det A \neq 0 \quad (8)$$

Разумеется, такая система совместна, т.к. $\text{rang}(A|Y)$ не может быть больше $\text{rang } A = n$. Изложим метод решения такой системы, принадлежащий Крамеру, из-за чего и системы вида (7), (8) часто называют **крамеровскими**.

Запишем систему (7) в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

и пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторое её решение. Фиксируем произвольно индекс k , ($k=1, 2, \dots, n$), и рассмотрим определитель Δ_k , получающийся из Δ заменой его k -го столбца столбцом правых частей B . Заменяя затем k -й столбец определителя Δ_k по формулам (9), придём к равенству

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(k -й столбец)

Если использовать линейность определителя Δ_k по k -му столбцу, то предыдущее равенство приведётся к виду

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^n x_j \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(k -й столбец)

Слагаемые с индексами $j \neq k$ обратятся в ноль (почему?), а у слагаемого с $j = k$ определитель равен Δ . Таким образом, получаем $\Delta_k = x_k \Delta$. Поскольку наше рассуждение справедливо при $k = 1, 2, \dots, n$, приходим к **формулам Крамера** для вычисления единственного решения системы (7), (8):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (10)$$

5.4.4. Анализ линейной системы уравнений общего вида

Вернёмся к системе (2) и опишем алгоритм её исследования и решения, используя понятия, введённые в этом разделе. При этом мы заново найдём и результаты, полученные ранее методом Гаусса. Однако появятся и новые или более удобные для приложений выводы.

Итак, исследование системы (2) естественно начать с вычисления рангов матриц A и $(A|Y)$. Если они различны, то система несовместна в силу теоремы Кронекера–Капелли.

В случае выполнения условия (4) система совместна, и можно найти базисный минор M порядка $r = \text{rang } A$, общий для матриц A и $(A|Y)$. Не ограничивая общности, можно считать, что он расположен в левом верхнем углу матрицы A . В противном случае можно свести дело к этому, меняя местами уравнения и меняя номера неизвестных. Таким образом, система (2) оказывается эквивалентной следующей системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n + y_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n + y_2 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n + y_r \end{cases} \quad (11)$$

Неизвестные $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ называются при этом **связанными**, а неизвестные $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ – **свободными**.

Для любого набора свободных неизвестных система (11) решается с помощью правила Крамера однозначно относительно связанных неизвестных:

$x_1 = \frac{M_1}{M}, \dots, x_r = \frac{M_r}{M}$, где M_j ($j = 1, \dots, r$) – определитель, получаемый из

M заменой j -го столбца столбцом $-x_{r+1}\tilde{A}_{r+1} - \dots - x_n\tilde{A}_n + Y$, в котором

$$\tilde{A}_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{1,r+1} \\ \dots \\ a_{r,r+1} \end{pmatrix}, \dots, \tilde{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{rn} \end{pmatrix}, \tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \end{pmatrix}.$$

Используя теперь линейность определителя M_j по j – столбцу, приводим (так, как это сделано в методе Гаусса) решение системы (2), соответствующее заданному набору свободных неизвестных, к виду:

$$X = x_{r+1}B_1 + x_{r+2}B_2 + \dots + x_nB_{n-r} + C, \quad (12)$$

где:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad B_{n-r} = \begin{pmatrix} b_{n-r,1} \\ \dots \\ b_{n-r,r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},$$

b_{kl}, c_l – некоторые числа.

В качестве $x_{r+1}, \dots, x_n$ в (12) можно выбрать любой набор чисел. Таким образом, множество всех решений системы (2), называемое её **общим решением**, записывается в виде:

$$X = t_1 B_1 + t_2 B_2 + \dots + t_{n-r} B_{n-r} + C \quad (13)$$

причём $B_1, B_2, \dots, B_{n-r}$ – линейно независимые векторы–столбцы высоты n .

Система уравнений, получающаяся из (2) при $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (14)$$

называется **однородной системой**, соответствующей системе (2). Очевидно, для общего решения однородной системы вместо (13) получается выражение

$$X = t_1 B_1 + t_2 B_2 + \dots + t_{n-r} B_{n-r} \quad (15)$$

с теми же $B_1, B_2, \dots, B_{n-r}$, что и в (13).

Сформулируем следующие выводы:

а) *Общее решение (15) однородной системы (14) есть подпространство размерности $(n - r)$ в $\mathbb{R}^n$, где n – число неизвестных в системе, r – ранг её матрицы.*

б) *Общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.*

в) *Разность двух частных решений неоднородной системы (2) есть некоторое решение соответствующей системы (14).*

г) *Совместная система (2) имеет единственное решение в том и только в том случае, когда число неизвестных совпадает с рангом матрицы системы.*

д) Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Она имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда число неизвестных больше ранга матрицы системы.

е) Квадратная однородная система ($m = n$) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель её матрицы равен нулю.

Теоретические вопросы к главе 5.

1. Дать определение скалярного умножения двух векторов. Как найти длину вектора и угол между векторами с помощью скалярного произведения?
2. Сформулировать и обосновать основные свойства скалярного умножения.
3. Каково практическое применение свойств коммутативности и линейности скалярного умножения?
4. Что такое неравенство Коши – Буняковского?
5. Какие векторы называются ортогональными? Какой вектор называется нормированным?
6. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими декартовыми координатами.
7. Вывести выражение длины вектора через его декартовы координаты; формулу расстояния между двумя точками через их декартовы координаты (рассмотреть случаи на прямой, на плоскости, в трёхмерном пространстве).
8. Вывести общее уравнение плоскости в векторной и скалярной формах, не используя её параметрическое представление. Каков геометрический смысл коэффициентов при координатах в скалярной форме уравнения плоскости?
9. Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве (координаты декартовы). Вывести формулу расстояния от точки M_0 до плоскости. Как определить, с какой стороны от плоскости расположена точка M_0 ?
10. Аналогичный вопрос для прямой $Ax + By + D = 0$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости.
11. Что значит задать ориентацию на прямой, на плоскости, в трёхмерном пространстве? Для чего надо задавать ориентацию?
12. Дать определение векторного произведения геометрических векторов.

13. Сформулировать и обосновать основные свойства векторного произведения.
14. Вывести формулу для вычисления векторного произведения через координаты перемножаемых векторов в заданном произвольном базисе. Рассмотреть частный случай ортонормированного базиса.
15. Дать определение смешанного произведения трёх векторов. Сформулировать основные свойства смешанного произведения.
16. Дать определения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков.
17. Что такое определитель матрицы 1-го, 2-го или 3-го порядка? В чём состоит правило Саррюса?
18. Сформулировать рекуррентное определение определителя n -порядка.
19. Сформулировать и обосновать свойства определителей, касающиеся:
 - определителя единичной матрицы;
 - перемены мест двух строк определителя;
 - определителя с двумя одинаковыми строками;
 - линейности определителя по строке.
20. Что значит транспонировать матрицу? Как меняется определитель матрицы при её транспонировании? Что следует из ответа на этот вопрос по поводу столбцов определителя?
21. Дать определение минора матрицы и алгебраического дополнения элемента матрицы.
22. Сформулировать теорему о разложении определителя по строке и её следствия.
23. Дать определение ранга матрицы. Что такое базисный минор и базисные строки (столбцы) матрицы?
24. Сформулировать теорему о связи ранга матрицы с количеством её линейно независимых строк (столбцов).
25. Какие методы практического вычисления ранга матрицы вы знаете? В чём они состоят?