Глава 4. Точки и векторы. Метод координат

4.1. Геометрические векторы

В этом разделе мы обращаемся к знакомой по средней школе теме – евклидовой геометрии. Однако подход к ней будет новым для многих вчерашних школьников и заключается он в *систематическом применении метода координат, который позволяет перевести геометрические факты на язык чисел, уравнений, неравенств, короче – на язык алгебры.* Такой перевод позволяет применять алгебраические методы к решению геометрических проблем. Раздел математики, в котором развивается координатный метод в геометрии, называется ***аналитической геометрией***.

Одно из важных достоинств такого подхода к геометрическим вопросам состоит в том, что мы получаем возможность эффективно изучать не только простейшие геометрические объекты – точки, векторы, прямые, плоскости, многогранники, но и более или менее произвольные "кривые" линии, поверхности, тела. Правда, для этого иногда надо привлекать аппарат не только алгебры, но и дифференциального исчисления. В результате получается раздел математики, называемый ***дифференциальной геометрией***. Соответствующие вопросы будут затрагиваться в нашем курсе несколько позже.

Есть ещё один эффект от применения метода координат – "обратный" по отношению к предыдущим: *возможность использовать геометрическую наглядность при исследовании чисто алгебраических объектов, скажем уравнений или систем уравнений.* Например, задачу о решении системы линейных уравнений с двумя или тремя неизвестными можно интерпретировать, как задачу о нахождении общих точек некоторых прямых или плоскостей. Даже если неизвестных в системе больше, чем три, можно пытаться исследовать её по аналогии с геометрически прозрачным случаем трёх неизвестных. При этом геометрические понятия типа точки, вектора, прямой и плоскости естественным образом обобщаются на многомерное пространство. Раздел математики, вводящий и изучающий эти обобщения, и применяющий их к исследованию систем линейных уравнений, называется ***линейной алгеброй.***

Вот с таким кругом вопросов мы и начинаем знакомиться.

Модель реального обитаемого нами пространства, описываемая геометрией Евклида, исходит, прежде всего, из того, что это пространство есть множество точек. Обозначим это множество E.

Наряду с понятием ***точки***, моделирующим идею наличия различных самых маленьких "мест" в пространстве, важнейшее значение в геометрии имеет понятие ***вектора***. Оно моделирует идею возможности *смещения в пространстве на определённое расстояние в определённом направлении.*

Направление смещения в пространстве однозначно определяется заданием прямой линии с указанием направления движения вдоль неё, а расстояние – фиксированием на такой прямой отрезка заданной длины. Поэтому вектор можно поначалу определить как ***направленный отрезок***, или ***вектор-отрезок***: *отрезок прямой с заданным направлением движения вдоль него*. Это направление обычно указывается стрелкой.

Поскольку мы решили определить вектор как совокупность *только* направления и расстояния, *следует считать* ***равными****, т.е. определяющими один и тот же вектор, все те направленные отрезки, которые: а*) *лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых; б*) *имеют одинаковые длины и имеют одинаковые направления* (*"смотрят" в одну и ту же сторону от прямой, соединяющей их начала*). *Иначе говоря, два направленных отрезка представляют один и тот же вектор, если их можно совместить друг с другом параллельным смещением.* Каждый вектор следует понимать как любой из его эквивалентных представителей – равных направленных отрезков (рис.1).

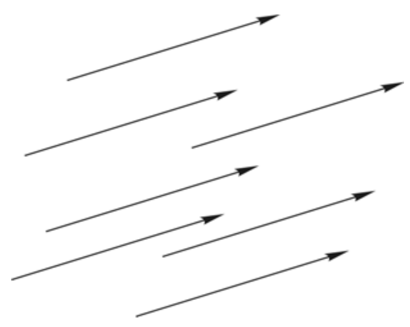

Рис. 1. Различные векторы-отрезки, представляющие один и тот же геометрический вектор.

Эта ситуация похожа, например, на понятие рационального числа: одно и то же рациональное число представляется равными различными дробями:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-8}{-24}=\frac{7}{21}=\ldots$$

Таким образом, определяется совокупность всех векторов евклидовой геометрии, или ***геометрических векторов***. Обозначается вектор чаще всего буквой со стрелкой сверху или жирной буквой. Мы изберём первый способ.

Для изображения геометрического вектора в каждой конкретной ситуации мы будем выбирать удобный вектор из числа его представителей – векторов-отрезков ("откладывать" геометрический вектор от какой-либо точки).

Кроме перемещений в пространстве, векторы используются для моделирования многих физических величин, характеризуемых интенсивностью и направлением: скорость, ускорение, сила и т.д.

На множестве всех геометрических векторов естественным образом определяются операции ***сложения векторов*** и ***умножения вектора на число***.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ *– два вектора. Их* ***суммой*** *называется вектор, обозначаемый* $\vec{a} + \vec{b}$*, который определяется так: надо отложить вектор* $\vec{b}$ *от конца вектора* $\vec{a}$*, тогда* $\vec{a} + \vec{b}$ *есть вектор с началом в начале* $\vec{a}$ *и концом в конце* $\vec{b}$*. То же определение можно выразить с помощью известного* ***правила параллелограмма*** (рис. 2).

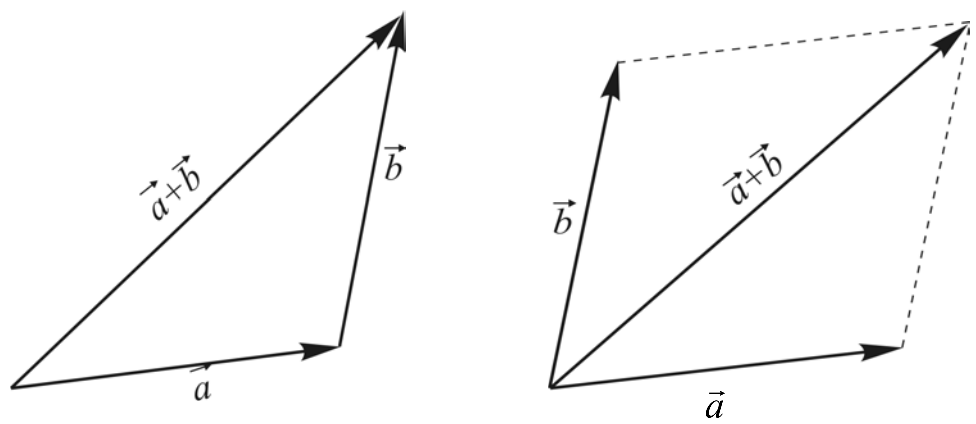

Рис. 2. К определению суммы геометрических векторов.

Это определение возникло из опытного факта: результат двух последовательных смещений в пространстве, характеризуемых векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно представить, как результат одного смещения на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

Произведением $\lambda\vec{a}$ *действительного числа* λ *на вектор* $\vec{a}$ *называется вектор, длина которого получается умножением длины вектора* $\vec{a}$ *на* $|\lambda|$*, а* *направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если* $\lambda < 0$ (рис. 3).

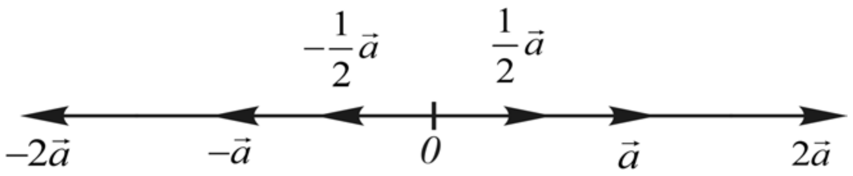

Рис.3. К определению произведения геометрического вектора на число.

Нулевым вектором *называется вектор нулевой длины*. Нулевой вектор будем обозначать символом $\vec{0}$.

Операции сложения геометрических векторов и умножения вектора на число обладают рядом очевидных геометрических свойств, которые мы здесь отметим.

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Это свойство называется ***коммутативностью сложения*** векторов, и ясно из рис. 2. Оно аналогично соответствующему свойству чисел.

б) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Это – ***ассоциативность сложения*** векторов (рис. 4). Такое же свойство имеется у чисел. Благодаря ему можно говорить о сумме, не зависящей от порядка сложения, трёх и более векторов.

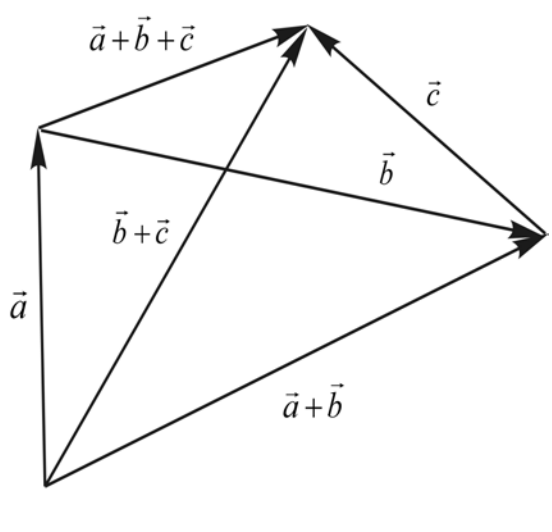

Рис. 4. Ассоциативность сложения геометрических векторов.

в) Существует единственный вектор, прибавление которого к любому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего. Это ***нулевой вектор***:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

г) Для любого вектора $\vec{a}$ найдётся единственный ***противоположный*** ему вектор $\vec{a}'$, т.е. такой, что

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}.$$

Очевидно $\vec{a}'=(-1)\vec{a}$, что короче обозначается $-\vec{a}$.

Перечисленные свойства позволяют определить разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Действительно, можно выписать следующую цепочку эквивалентных друг другу равенств:

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a};\quad \vec{b}+\vec{c}+\vec{b}'=\vec{a}+\vec{b}';\quad \left(\vec{b}+\vec{b}'\right)+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}';$$

$$\vec{0}+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}';\quad \vec{c}=\vec{a}+(-1)\vec{b}.$$

Это и есть искомая разность, которую проще записывать в виде $\vec{a}-\vec{b}$.

д) Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - векторы, а α - число, то

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

Это – ***дистрибутивность умножения числа на вектор относительно сложения векторов*** (рис. 5) .

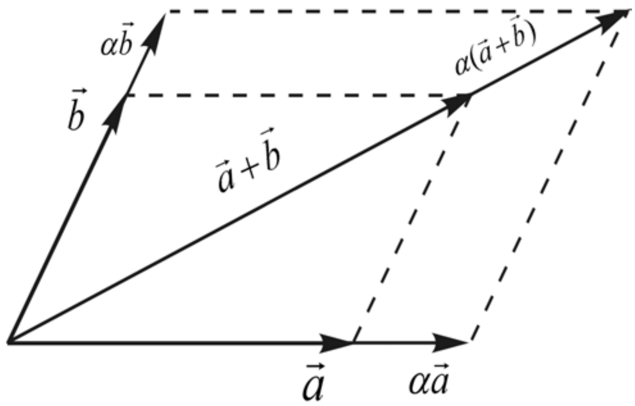

Рис. 5. К свойству д).

Проще говоря, при умножении числа на сумму векторов можно раскрывать скобки обычным образом.

е) Если α, β – числа и $\vec{a}$ – вектор, то

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$$

Это свойство ***дистрибутивности умножения числа на вектор относительно сложения чисел***. Проще говоря, при умножении суммы чисел на вектор можно раскрывать скобки, как при умножении на число.

ж) Если α, β - числа и $\vec{a}$ - вектор, то

$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}.$$

з) $\quad 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Из перечисленных свойств видно, что многие действия над векторами (вычитание, сложение нескольких векторов, группировка слагаемых, раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, перенос членов из одной части равенства в другую) проделываются по привычным из практики действий с числами правилам.

Пусть теперь даны s векторов

$$\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2, \quad \ldots, \quad \vec{a}_s. \tag{1}$$

Применяя к ним конечное число раз операции сложения векторов и умножения их на числа, получим, после приведения подобных членов, вектор

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_s\vec{a}_s, \tag{2}$$

где $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_s$ – числа.

Вектор (2) *называется* ***линейной комбинацией векторов*** (1). *Числа* $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_s$ *называются* **коэффициентами** *этой линейной комбинации.*

Говорят также, что *вектор* $\vec{a}$ ***линейно выражается*** *через векторы* (1).

Снова рассмотрим произвольную систему векторов (1). *Эта система называется* ***линейно зависимой****, если хотя бы один из её векторов линейно выражается через остальные, и* ***линейно независимой*** *– в противном случае.*

Сформулированное определение годится, если в системе (1) больше одного вектора. *Система из одного вектора, по определению, считается линейно зависимой, если это нулевой вектор, и линейно независимой в противном случае.*

ПРИМЕР 1. Любая система векторов, среди которых есть нулевой вектор, линейно зависима.

В самом деле, нулевой вектор можно представить как линейную комбинацию остальных векторов системы с нулевыми коэффициентами.

ПРИМЕР 2. Любые векторы, параллельные одной и той же прямой, линейно зависимы. *Такие векторы называются* ***коллинеарными***.

ПРИМЕР 3. Любые векторы, параллельные одной и той же плоскости, линейно зависимы. *Их называют* ***компланарными***.

Докажем наше утверждение. Если среди векторов системы есть нулевой или пара коллинеарных, оно очевидно. Если же это не так, то один из векторов можно "разложить по двум другим" (рис. 6).

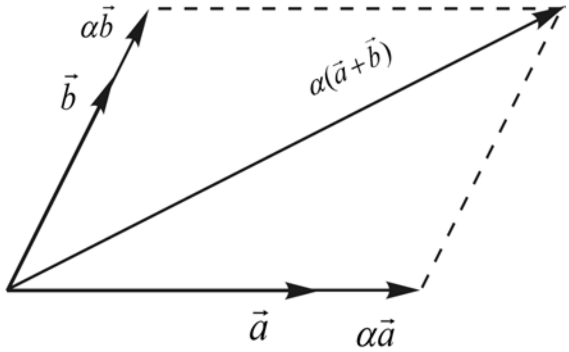

Рис. 6. К примеру 3.

ПРИМЕР 4. Любые четыре геометрические вектора линейно зависимы.

Обоснование аналогично предыдущему примеру, с той разницей, что один из некомпланарных векторов разлагается по трём остальным.

ПРИМЕР 5. Добавляя к системе линейно зависимых векторов ещё какие-нибудь векторы, снова получим линейно зависимую систему.

Всякий упорядоченный набор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *трёх линейно независимых геометрических векторов называется* ***базисом*** *множества геометрических векторов.* Имея базис, можно *взаимно однозначно сопоставить каждому геометрическому вектору* $\vec{x}$ *упорядоченный набор трёх чисел* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *– его* ***координат в этом базисе*** (рис. 7), *так что*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \qquad (3)$$

(Фигурные скобки для записи координат векторов используются, чтобы отличать их от координат точек).

Таким образом, при наличии базиса, знать вектор – это знать тройку его координат.

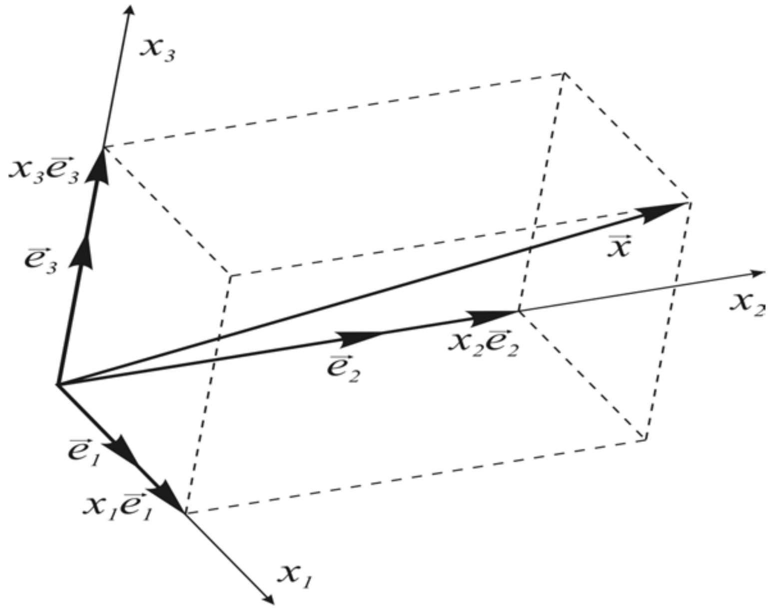

Рис. 7. Определение координат по базису.

(Геометрически очевидно, что все координаты нулевого вектора – нули).

Вектору, равному сумме векторов, соответствует почленное сложение наборов координат: если наряду с вектором (3) имеется вектор

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3, \tag{4}$$

то

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + \vec{y}_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3. \tag{5}$$

Аналогично, умножению числа α на вектор соответствует почленное умножение этого числа на координаты вектора:

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1)\vec{e}_1 + (\alpha x_2)\vec{e}_2 + (\alpha x_3)\vec{e}_3. \tag{6}$$

Формулы (5), (6) сводят операции над векторами (сложение и умножение на числа) к соответствующим операциям над числами – координатами векторов. При этом любое равенство $\vec{x} = \vec{y}$ двух векторов оказывается эквивалентным системе трёх числовых равенств $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$.

ПРИМЕР 7. Задан тетраэдр $OABC$ (рис. 8). В базисе из рёбер $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ найти координаты:

1) вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E – середины рёбер OA и BC,

2) вектора $\overrightarrow{OF}$, где F – точка пересечения медиан основания ABC.

Для случая 1) имеем:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

Ответ: $\{-1/2, 1/2, 1/2\}$.

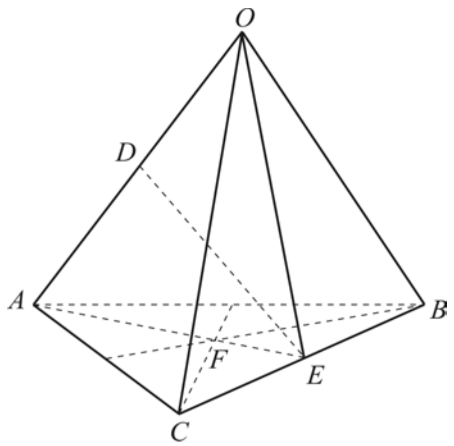

Рис. 8. К примеру 7.

Случай 2):

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OE} =$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Ответ: $\{1/3, 1/3, 1/3\}$.

ПРИМЕР 8. Векторы $\vec{p}\{0,2,1\}, \vec{q}\{0,1,-1\}, \vec{r}\{5,-3,2\}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Составляют ли они сами базис?

Другими словами, являются ли они линейно независимыми? Несколько позже мы получим стандартные способы ответа на подобный вопрос. А сейчас будем действовать, пользуясь только определением линейной зависимости и геометрическим смыслом. Прежде всего, очевидно, что все три вектора отличны от нулевого. Теперь выясним, коллинеарны ли, скажем, векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, т. е. верно ли равенство $\vec{p} = \alpha\vec{q}$ с некоторым числом α. В координатах это равенство имеет вид системы уравнений

$$\begin{cases} 0=\alpha\cdot 0 \\ 2=\alpha\cdot 1 \\ 1=\alpha\cdot(-1) \end{cases}.$$

Очевидно, эта система не удовлетворяется ни при каком α, т.е. векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны. Теперь осталось выяснить, компланарны ли три вектора $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$, т.е. лежит ли третий из них в плоскости первых двух, т.е. выполняется ли равенство $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$ при некоторых числах α и β. Если да, то данная тройка векторов не составляет базиса, если нет – составляет. В координатах указанное равенство принимает вид системы уравнений

$$\begin{cases} 5=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 \\ -3=\alpha\cdot 2+\beta \\ 2=\alpha-\beta \end{cases}.$$

Уже из первого уравнения видно, что система не удовлетворяется никакими числами α и β. Итак, векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис множества геометрических векторов.

ПРИМЕР 9. Найти координаты вектора $\vec{x}\{15,-20,-1\}$ в базисе $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ предыдущего примера.

Очевидно, следует найти коэффициенты x_1,x_2,x_3 в разложении

$$\vec{x}=x_1\vec{p}+x_2\vec{q}+x_3\vec{r}.$$

В координатах это разложение имеет вид системы уравнений

$$\begin{cases} 0\cdot x_1+0\cdot x_2+5x_3=15 \\ 2x_1+x_2-3x_3=-20 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

Решая эту систему, легко находим её единственное решение:

$$x_1=-6,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

Таким образом

$$\vec{x}=-6\vec{p}+\vec{q}+3\vec{r}.$$

4.2. Векторные пространства

Существуют совокупности объектов, совсем не похожих на геометрические векторы и даже имеющих совсем не геометрическую природу, но обладающих свойствами, аналогичными свойствам этих векторов. А именно, для элементов этих совокупностей тоже можно определить операции сложения и умножения на числа так, чтобы выполнялись свойства а) – з) из 4.1 со всеми их следствиями. В частности, для таких совокупностей можно вводить понятия линейной зависимости, базиса и координат.

*Множество V называется **векторным** или **линейным пространством**, если определены операции сложения его элементов и умножения их на числа, так что:*

*Для любой упорядоченной пары $x, y \in V$ существует единственный элемент $x+y \in V$ (**сумма** x и y); для любого $x \in V$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственный элемент $\alpha x \in V$ (**произведение** α на x), при этом выполняются следующие аксиомы:*

1. $\forall x, y \in V: \quad x+y=y+x.$
2. $\forall x, y, z \in V: \quad (x+y)+z=x+(y+z).$
3. *Существует единственный элемент из V, называемый **нулевым** и обозначаемый* 0*, такой что* $\forall x \in V: \quad x+0=x.$
4. *Для каждого $x \in V$ существует единственный элемент $x' \in V$, такой что $x+x'=0$. Этот элемент называется **противоположным** для x.*
5. $\forall x, y \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in V: \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in V: \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x.$
8. $\forall x \in V: \quad 1 \cdot x=x.$

*Элементы векторного пространства называются **векторами**.*

Свойства 1 – 8 *называются **аксиомами векторного пространства**.*

Сделаем несколько замечаний к приведённому определению векторного пространства.

- После этого определения термин “вектор” принимает более общий смысл, чем первоначально в теории геометрических векторов.

- Новый смысл обретает и термин “пространство”. Это вовсе не обязательно реальное физическое пространство, а какое угодно множество, лишь бы для его элементов были определены операции сложения и умножения на числа, удовлетворяющие аксиомам 1 – 8.

- Векторы произвольного векторного пространства мы будем, как правило, обозначать латинскими буквами *без стрелки*, оставляя её для случая геометрических векторов. Для чисел же будем стараться, по возможности, использовать греческие буквы. Кстати, в теории векторных пространств числа часто называют ***скалярами***.

- Замечания после свойств а) – з) из пункта 4.1 о действиях над геометрическими векторами остаётся в силе и для векторов произвольной природы. Это понятно, поскольку аксиомы векторного пространства 1 – 8 фактически совпадают с указанными свойствами.

- Определения линейной комбинации и линейной зависимости или независимости геометрических векторов сохраняется в силе и для произвольного векторного пространства.

4.3. Системы линейных алгебраических уравнений и их исследование методом Гаусса

Рассмотрим часто возникающую в теории и практике действий с векторами задачу: является ли данный вектор y некоторого n-мерного векторного пространства V линейной комбинацией заданных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ того же пространства? Иначе говоря, существует ли набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ таких, что равенство

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m = y \qquad (1)$$

имеет место? Например, так стоит задача при решении вопроса о линейной зависимости векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (тогда $y = 0$). Помимо проблемы существования решения $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ уравнения (1), интерес обычно представляют и проблемы единственности этого решения, нахождения алгоритма вычисления составляющих его чисел.

Анализ уравнения (1) существенно опирается на метод координат. А именно, выбрав в пространстве V какой-либо базис, разложим по нему данные векторы, заменив их соответствующими наборами координат:

$$a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

после чего можно записать эквивалентную (1) систему числовых равенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = y_n \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку ставится вопрос о нахождении чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ при заданном y, это есть система n числовых уравнений с m числовыми неизвестными. *Её называют* ***системой линейных алгебраических уравнений*** (иногда используется аббревиатура СЛАУ). Подобные системы сплошь и рядом встречаются в линейной алгебре и её приложениях, в чём мы неоднократно убедимся.

Обычно данные в системе величины сводят в (n,m) ***-матрицу системы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{4}$$

и ***матрицу-столбец правых частей***

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Иногда эти два объекта объединяют в ***расширенную матрицу системы***

$$A|Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & y_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & y_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Широко используется ***индексная запись*** системы (3):

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = y_i\,, \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

Если правые части системы (3) – *нули, т.е. вектор-столбец* (5) *равен нулю, система* (3) *называется* ***однородной***, *или* ***системой без правых частей***.

Приведя необходимые определения, обратимся к наиболее универсальному, практичному и, наверное, простому методу исследования системы (3). *Он называется* ***методом последовательного исключения неизвестных***, *или* ***методом Гаусса***. В дальнейшем мы познакомимся и с другими методами, имеющими существенное значение для теоретических вопросов, в которых встречаются подобные системы, однако практическое решение конкретных систем, в том числе и с очень большим числом уравнений и неизвестных, как правило, осуществляется методом Гаусса или его модификациями.

Этот метод позволяет ответить на следующие вопросы:

- *Имеет ли решения система* (3), *т.е.* ***совместна*** *ли она?*
- *Единственно ли решение системы, т.е.* ***определённая*** *ли она?*
- *Как описать* ***структуру множества решений****, если их много?*
- *Как вычислять* ***конкретные решения системы****?*

Суть метода более или менее ясна из его названия “метод последовательного исключения неизвестных”. Однако, на пути реализации этих самых последовательных исключений возможны некоторые “подводные камни”. Поэтому мы изложим строгое формальное описание метода Гаусса, не оставляющее никаких неясностей и понятное даже компьютеру.

Для этого перепишем систему (3) в несколько более громоздком, но удобном для нашего изложения виде

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \ldots + a_{1m}^0 x_m = y_1^0 \\ a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_1 + \ldots + a_{2m}^0 x_m = y_2^0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}^0 x_1 + a_{n2}^0 x_2 + \ldots + a_{nm}^0 x_m = y_n^0 \end{cases}. \tag{8}$$

Рассмотрим вначале первое уравнение этой системы. Может случиться, что $a_{11}^0 = a_{12}^0 = \ldots = a_{1m}^0 = y_1^0 = 0$, т.е. уравнение удовлетворяется любым набором неизвестных (x_1, x_2,…, x_m). Тогда первое уравнение можно отбросить, оставшиеся уравнения составят новую систему, эквивалентную исходной.

Другая возможность: $a_{11}^0 = a_{12}^0 = \ldots = a_{1m}^0 = 0$, но $y_1^0 \neq 0$. Первое уравнение, а следовательно и вся система (8) не удовлетворяется никаким набором (x_1, x_2,…, x_m), т.е. она несовместна. Фиксированием этого факта исследование системы заканчивается.

Наконец, остаётся последняя возможность: среди коэффициентов $a_{11}^0, a_{12}^0, \ldots, a_{1m}^0$ есть, по меньшей мере, один, отличный от нуля. Назовём его ***ведущим элементом*** матрицы системы. Не ограничивая общности анализа, можно считать, что это a_{11}^0 (в противном случае можно свести дело к этому случаю, временно изменив нумерацию неизвестных и запомнив это изменение). Решим первое уравнение системы (8) относительно неизвестного x_1, получая выражение

$$x_1 = -\frac{a_{12}^0}{a_{11}^0} x_2 - \frac{a_{13}^0}{a_{11}^0} x_3 - \ldots - \frac{a_{1m}^0}{a_{11}^0} + \frac{1}{a_{11}^0} y_1^0 \qquad (9)$$

Подставим его правую часть вместо x_1 в остальные уравнения системы (8), исключая из них x_1. Получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \ldots + a_{1m}^0 x_m = y_1^0 \\ \qquad a_{22}^1 x_1 + \ldots + a_{2m}^1 x_m = y_2^1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad a_{n2}^1 x_2 + \ldots + a_{nm}^1 x_m = y_n^1 \end{cases}, \qquad (10)$$

где

$$a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - \frac{a_{i1}^0}{a_{11}^0} a_{1j}^0, \quad y_i^1 = y_i^0 - \frac{a_{i1}^0}{a_{11}^0} y_1^0 \ (i = 2,3,\ldots, m; j = 2,3,\ldots, n) \qquad (11)$$

Очевидно, что системы (8) и (10) эквивалентны.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из всех уравнений (10), кроме первого. Это система с неизвестными (x_2, x_3 ,…, x_m). Поступим с ней так же, как с системой (8). Опять имеются три возможности: либо её первое уравнение удовлетворяется тождественно, его можно отбросить и перейти к более “короткой” системе; либо это уравнение противоречиво, т.е. система (8) по этой причине несовместна, что завершает её анализ; либо $a_{22}^1 \neq 0$. В последнем случае исключим неизвестное x_2 из всех уравнений (10), начиная с третьего.

Продолжим аналогичным образом последовательное исключение неизвестных. Может быть система (8) окажется несовместной из-за противоречивости одного из уравнений. Этот факт будет обнаружен. Что произойдёт в противном случае? Если по пути придётся отбросить k тождественно выполняющихся уравнений, т.е. неизвестные будут исключаться из $n - k$ уравнений, то мы исключим $n - k - 1$ неизвестных и получим эквивалентную (8) систему

$$\begin{cases} a_{11}^{0}x_1 + a_{12}^{0}x_2 + \ldots + a_{1,n-k}^{0}x_{n-k} + a_{1,n-k+1}^{0}x_{n-k+1} + \ldots + \ a_{1m}^{0}x_m = y_1^{0} \\ \qquad a_{22}^{1}x_2 + \ldots + a_{2,n-k}^{1}x_{n-k} + a_{2,n-k+1}^{1}x_{n-k+1} \ + \ldots + \ a_{2m}^{1}x_m = y_2^{1} \\ \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{n-k,n-k}^{n-k-1}x_{n-k} + a_{n-k,n-k+1}^{n-k-1}x_{n-k+1} + \cdots + a_{n-k,m}^{n-k-1}x_m = y_{n-k}^{n-k-1} \end{cases} \tag{12}$$

Переходом к системе (12) заканчивается первый этап применения метода Гаусса, называемый ***прямым ходом***.

Неизвестные $x_{n\text{-}k+1},\ldots, x_m$, не фигурирующие в “треугольной” части системы (12), называются ***свободными*** **(*независимыми*).** Рассмотрим сначала случай, когда их нет, т.е. когда $m = n - k$ (общее число неизвестных m совпадает с числом всех уравнений, кроме лишних, тождественных). Перебирая последовательно все m уравнений (12), от последнего к первому, мы *единственным образом* найдём сначала x_m, затем x_{m-1}, и т.д. до x_1 включительно. В этом состоит обратный ход метода Гаусса. Гарантией его однозначной реализуемости служит то, что ведущие элементы $a_{11}^{0}, a_{22}^{1}, \ldots, a_{n-k,n-k}^{n-k-1}$ отличны от нуля.

Таким образом, в случае $m = n - k$ система (8), а значит и (1), – совместная и определённая. Её решение вычисляется по алгоритму метода Гаусса.

Пусть теперь $m > n - k$, т.е. имеется $m - n - k$ свободных неизвестных $x_{n\text{-}k+1},\ldots, x_m$. Задавая *произвольно* их числовые значения, мы сводим систему (12) к “треугольной” и, реализуя обратный ход метода Гаусса, однозначно находим соответствующие значения оставшихся (***связанных***) неизвестных $x_1,\ldots, x_{n\text{-}k}$. Таким образом, *всякий выбор значений свободных неизвестных однозначно определяет решение системы* (1). Следовательно, в случае $m > n - k$ система (1) *совместна, но неопределённа*, т.е. имеет не одно решение.

Чтобы удобнее описать совокупность получающихся при этом решений, заметим, что выражения связанных неизвестных через свободные являются выражениями первой степени. Это видно из алгоритма обратного хода. Значит можно записать

$$\begin{aligned} &x_1 = b_{11}\, x_{n\text{-}k+1} + b_{12}\, x_{n\text{-}k+2} + \ldots + b_{1,m\text{-}n+k}\, x_m + c_1 \\ &x_2 = b_{21}\, x_{n\text{-}k+1} + b_{22}\, x_{n\text{-}k+2} + \ldots + b_{2,m\text{-}n+k}\, x_m + c_2 \\ &\ \ldots \\ &x_{n\text{-}k} = b_{n\text{-}k,1}\, x_{n\text{-}k+1} + b_{n\text{-}k,2}\, x_{n\text{-}k+2} + \ldots + b_{n\text{-}k,m\text{-}n+k}\, x_m + c_{n\text{-}k}\,, \end{aligned}$$

где буквы b с индексами – это заданные числа, определяемые матрицей исходной системы (1), а буквы c (с индексами) зависят ещё и от правых частей системы и *обращаются в нули, если правые части – нули* (см. (11)). Обозначим свободные неизвестные новыми буквами: $x_{n-k+1} = t_1$, $x_{n-k+2} = t_2$,…, $x_m = t_{m-n+k}$ Тогда любое решение системы (1) запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&x_1 = b_{11}\, t_1+b_{12}\, t_2+\ldots+b_{1,m-n+k}\, t_{m-n+k}+c_1\\
&x_2 = b_{21}\, t_1+b_{22}\, t_2+\ldots+b_{2,m-n+k}\, t_{m-n+k}+c_2\\
&\qquad\ldots\\
&x_{n-k} = b_{n-k,1}\, t_1+b_{n-k,2}\, t_2+\ldots+b_{n-k,m-n+k}\, t_{m-n+k}+c_{n-k}\\
&x_{n-k+1} = t_1\\
&x_{n-k+2} = t_2\\
&\qquad\ldots\\
&x_m = t_{m-n+k}
\end{aligned}
$$

Чтобы переписать эту громоздкую систему равенств в компактном виде, введём матрицы-столбцы высоты m:

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix},
$$

$$
B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n-k,1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \ldots \\ b_{n-k,2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad B_{m-n+k} = \begin{pmatrix} b_{1,n-m+k} \\ b_{2,n-m+k} \\ \ldots \\ b_{n-k,n-m+k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Тогда любое решение системы (2) представляется так:

$$
X = t_1\, B_1 + t_2\, B_2 + \ldots + t_{m-n+k}\, B_{m-n+k} + C \qquad (13)
$$

Отметим, что все столбцы B_1, B_2, ..., B_{m-n+k} – линейно независимы как векторы из R^m (почему?)

Подведём итоги, т.е. сформулируем, каким образом применение метода Гаусса позволяет ответить на вопросы, связанные с анализом системы (1).

1) *Если при прямом ходе метода Гаусса обнаруживается противоречивое уравнение, то система несовместна.*

2) *В противном случае она совместна, и все её решения даются формулой* (13)*, содержащей* $m-n+k$ *параметров, которые могут принимать произвольные значения* (*это свободные неизвестные*).

3) *Если свободных неизвестных нет, то система определённая, т.е. имеет единственное решение* (*вектор-столбец* C). *В случае однородной системы* (*без правых частей*) *это единственное решение есть нулевой вектор-столбец.*

4) *Если свободные неизвестные есть, то система неопределённая, т.е. имеет много решений. В случае однородной системы* ($C = 0$) *эти решения составляют множество всех линейных комбинаций векторов-столбцов* B_1, B_2, …, B_{m-n+k}, *т.е.* ($m–n+k$)*-мерное подпространство векторного пространства* R^m. *В случае неоднородной системы, к каждому такому решению надо прибавлять один и тот же вектор-столбец* C.

ПРИМЕР 1. Исследуем методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4=-2 \\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4=5 \end{cases} \qquad (14)$$

Из первого уравнения выражаем x_1 через остальные неизвестные и подставляем это выражение в три других уравнения. Получаем вместо (14) эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-3x_3-4x_4 \\ -x_3-x_4=0 \\ x_3-x_4=-2 \\ -x_2-3x_3+x_4=5 \end{cases}$$

Из четвёртого уравнения этой системы выражаем x_2 через x_3 и x_4 и подставляем это выражение во второе и третье уравнения, что фактически их не меняет. Это приводит к системе

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-3x_3-4x_4 \\ x_2=-3x_3+x_4-5 \\ -x_3-x_4=0 \\ x_3-x_4=-2 \end{cases}$$

Из третьего уравнения этой системы выражаем x_3 через x_4 и подставляем в последнее уравнение. Получаем систему, завершающую прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ \quad x_2 = -3x_3 + x_4 - 5 \\ \qquad x_3 = -x_4 \\ \qquad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

Обратным ходом находим последовательно $x_4 = 1$, $x_3 = -1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. Итак, система (14) имеет единственное решение $(1, -1, -1, 1)$.

ПРИМЕР 2. Примéним метод Гаусса к системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ \qquad x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ \qquad\quad x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Исключая последовательно x_1, затем x_2 и x_3, получаем, соответственно, системы

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ \quad x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = -6 \\ x_4 + x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_4 - 6 \\ \quad x_3 = 3 \\ x_4 + x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Исключение x_4 приводит, после отбрасывания лишнего уравнения (тождества), к системе

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_4 - 6 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -x_5 - 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Отбрасывая лишнее уравнение и проводя обратный ход, получаем выражения всех неизвестных через единственную неизвестную x_5:

$$\begin{cases} x_1 = -x_5 + 6 \\ x_2 = x_5 - 5 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -x_5 - 1 \\ x_5 = x_5, \end{cases} \quad \text{или, в форме матриц-столбцов,} \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения x_1 и подставляя его в остальные уравнения, убеждаемся, что второе уравнение обращается в тождество, а третье – противоречиво (проверьте!). Таким образом, заданная система несовместна.

4.4. Координаты точек

От абстрактного векторного пространства вернёмся к обычной евклидовой геометрии – модели реального пространства. Мы представляем себе его как множество E точек. Зафиксируем в E произвольную точку O, которую назовём ***началом отсчёта***. Затем каждой точке M из E сопоставим вектор $\overrightarrow{OM}$, называемый ***радиус-вектором*** точки M. Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие между всеми точками пространства E и всеми геометрическими векторами, т.е. векторами из V_3 (поскольку каждый вектор, если его отложить от начала отсчёта, оказывается радиус-вектором вполне определённой точки).

После этого многие рассуждения о точках можно пересказать на языке векторов (их радиус-векторов).

Зафиксируем теперь, кроме начала отсчёта O, ещё и некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в пространстве V_3. *Система* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ***называется аффинной системой координат пространства*** *E. Она позволяет сопоставить каждой точке* $M \in E$ *набор её аффинных координат* (x_1, x_2, x_3), *которые определяются как координаты радиуса-вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (см. рис.7 из п. 4.1).

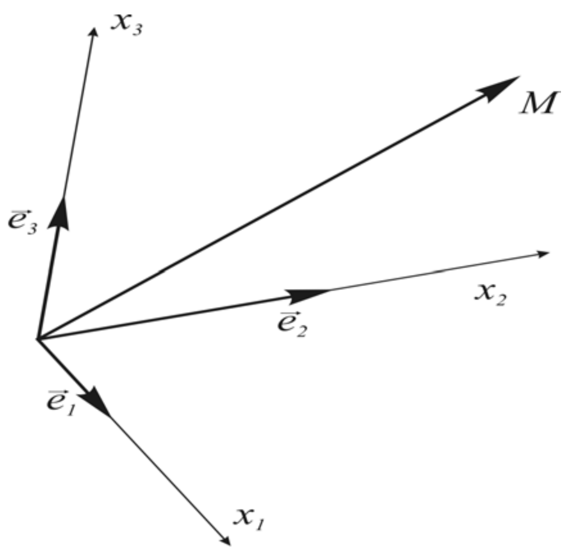

Рис. 1. Аффинная система координат в пространстве.

Таким образом, с помощью аффинной системы координат устанавливается *взаимно однозначное соответствие между точками пространства E и числовыми наборами арифметического трёхмерного пространства* R^3. Значит R^3 можно трактовать, по желанию, как арифметическую модель и векторного пространства V_3 и пространства точек *E*.

Вместо $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ аффинную систему координат часто обозначают $Ox_1x_2x_3$, вводя вместо базисных векторов ***координатные оси*** Ox_1, Ox_2, Ox_3 (оси ***абсцисс***, ***ординат*** и ***аппликат***). Единица длины на каждой оси есть длина соответствующего базисного вектора.

В том случае, когда базисные векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ *попарно перпендикулярны и имеют одинаковую длину, аффинная система координат называется* ***декартовой системой****, а соответствующие координаты –* ***декартовыми координатами***. При этом базисные векторы часто обозначают символами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Напомним, что координаты векторов в декартовом базисе обычно заключают в фигурные скобки: так, представление $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ эквивалентно записи $\vec{a}\{x,y,z\}$.

Рассуждения, аналогичные проведённым выше, можно провести не для всего пространства точек *E*, а для множества точек какой-либо плоскости. При этом векторное пространство V_3 надо заменить на V_2. Аффинная система координат будет содержать два вектора, каждой точке плоскости будут соответствовать две координаты (см. рис. 2).

Наконец, аналогично можно рассматривать множество точек какой-либо прямой. Аффинная система координат будет иметь один базисный вектор, а каждая точка – одну координату (рис. 3).

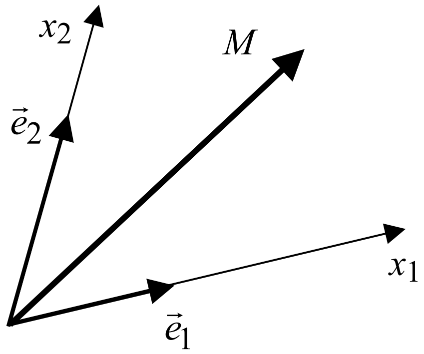

Рис. 2. Аффинная система координат на плоскости.

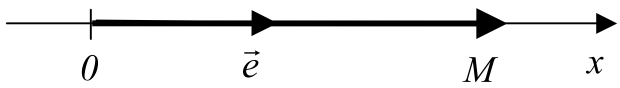

Рис.3. Аффинная система координат на прямой.

Имея аффинную систему координат, можно переводить на язык чисел многие геометрические задачи. Приведём два простых примера.

ПРИМЕР 1. Даны две точки в пространстве своими аффинными координатами: $A\left(x_A, y_A, z_A\right), B\left(x_B, y_B, z_B\right)$. Найти вектор $\overrightarrow{AB}$.

На языке аналитической геометрии найти вектор означает найти его координаты. Поскольку (рис. 4)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \tag{1}$$

а координаты радиус-векторов совпадают с координатами точек – их концов, имеем

$$\overrightarrow{AB}\left\{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right\}.$$

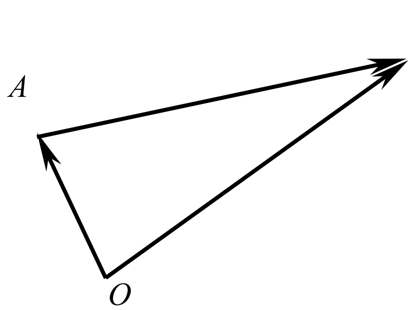

Рис. 4. К примеру 1.

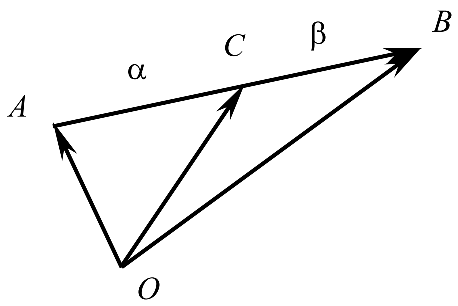

Рис. 5. К примеру 2.

Если же даны точка $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ и вектор $\overrightarrow{AB}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, то с помощью той же формулы (1) легко находится точка *B*: $B\left(x_A + \alpha,\ y_A + \beta,\ z_A + \gamma\right)$.

ПРИМЕР 2. Пусть, как и в предыдущем примере, заданы точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Найти точку C, которая делит отрезок AB в заданном отношении α/β (рис. 5).

Очевидно, $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{AB}$.

Поэтому точка C имеет координаты

$$x_C = x_A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(x_B - x_A),$$

$$y_C = y_A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_B - y_A),$$

$$z_C = z_A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(z_B - z_A)$$

ПРИМЕР 3. На плоскости с заданной аффинной системой координат рассмотрим параллелограмм. Зная его смежные вершины $M(-2,6)$ и $N(2,8)$, а также точку пересечения диагоналей $P(2,2)$, найти координаты двух других вершин.

Имеем (рис. 6):

$$\vec{OA} = \vec{OM} + 2\vec{MP} = \vec{OM} + 2(\vec{OP} - \vec{OM}) = 2\vec{OP} - \vec{OM}$$

$$\vec{OB} = \vec{ON} + 2\vec{NP} = \vec{ON} + 2(\vec{OP} - \vec{ON}) = 2\vec{OP} - \vec{ON}$$

Радиус-векторы искомых точек выражены через радиус-векторы заданных точек. Этого достаточно, чтобы легко вычислить нужные координаты.

Ответ: $A(6,2)$, $B(2,-4)$.

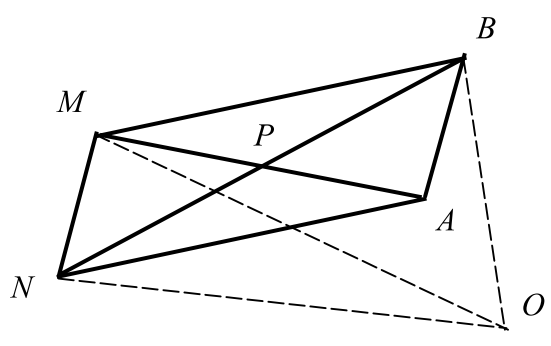

Рис. 6. К примеру 3.

4.5. Аналитическое представление прямой линии

Рассмотрим какую-либо прямую линию Δ в пространстве E (рис. 1). Чтобы зафиксировать её индивидуальность, достаточно задать некоторую её точку M_0 и некоторый отличный от нуля вектор $\vec{l}$, параллельный этой прямой. Предположим, что в пространстве выбрано начало отсчёта – точка O.

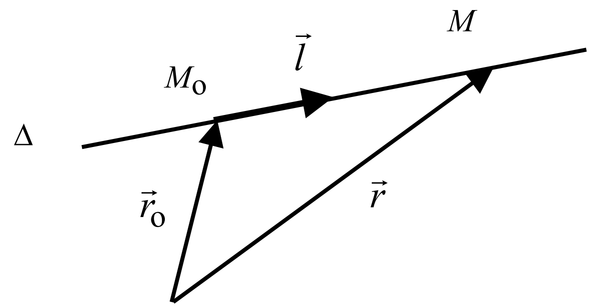

Рис. 1. Задание прямой линии.

Пусть теперь M – произвольная точка прямой Δ. Обозначим $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Из рис. 1 очевидно, что для каждой точки M прямой Δ, и только для таких точек, выполняется соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{l} \cdot t, \tag{1}$$

где t – действительное число. *Это соотношение называется **параметрическим представлением прямой** Δ **в векторной форме***. Оно представляет собой функцию числа t, определённую на всей прямой $\mathbb{R}$, значениями этой функции являются радиус-векторы всех точек этой прямой. Эта функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой.

Для краткости вместо “параметрическое представление” используют термин “***параметризация***”. *Число t в формуле* (1) *называют **параметром** прямой*.

Если, в дополнение к началу отсчёта O, в пространстве задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т.е. имеется аффинная система координат $Ox_1x_2x_3$, то, вводя координаты всех векторов, фигурирующих в (1), получаем вместо одного векторного равенства (1) три числовых:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + l_1 \cdot t \\ x_2 = x_{02} + l_2 \cdot t. \\ x_3 = x_{03} + l_3 \cdot t \end{cases} \tag{2}$$

Это – ***параметрическое представление прямой в координатной*** (*или* ***скалярной***) ***форме***. При желании, его можно рассматривать как систему трёх уравнений с четырьмя неизвестными x_1, x_2, x_3, t, из которых одна свободна.

Если выразить параметр t из каждого равенства системы (2) и приравнять результаты, то получим систему двух уравнений

$$\frac{x_1 - x_{01}}{l_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{l_2} = \frac{x_3 - x_{03}}{l_3} \qquad (3)$$

с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3. Эта система эквивалентна системе (2). Действительно, если обозначить общее значение всех отношений (3) через t и выразить каждую координату x_1, x_2, x_3 через t, получим систему (2).

Уравнения (3) *называются* ***каноническими уравнениями прямой***.

Сделаем одно замечание по поводу приведённого вывода уравнений (3) из уравнений (2). Он возможен только тогда, когда все знаменатели в (3) отличны от нуля. Однако, может случиться, что одна или даже две координаты направляющего вектора прямой окажутся нулями (лишь бы не все три, поскольку вектор не может быть нулевым – тогда прямая не определена). Пусть, например $l_1 = 0$. Тогда первый знаменатель в (3) есть ноль, что, вообще говоря, не имеет смысла. Но, как видно из (2) это значит лишь, что $x_1 - x_{01} = 0$. Понимая это, мы всё-таки применяем в этом случае запись вида (3), которая принимает вид

$$\frac{x_1 - x_{01}}{0} = \frac{x_2 - x_{02}}{l_2} = \frac{x_3 - x_{03}}{l_3}$$

и фактически эквивалентна системе равенств

$$x_1 - x_{01} = 0, \quad \frac{x_2 - x_{02}}{l_2} = \frac{x_3 - x_{03}}{l_3}.$$

Аналогично, если $l_1 = l_2 = 0$, мы пишем

$$\frac{x_1 - x_{01}}{0} = \frac{x_2 - x_{02}}{0} = \frac{x_3 - x_{03}}{l_3},$$

имея в виду систему равенств

$$x_1 - x_{01} = 0, \quad x_2 - x_{02} = 0, \quad \frac{x_3 - x_{03}}{l_3} = t.$$

Перейдём к примерам, в которых для аффинных координат используем обозначения x, y, z.

ПРИМЕР 1. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$, параллельной

(а) вектору $\vec{l}\,\{2,-3,5\}$,

(б) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$,

(в) оси Ox,

(г) оси Oy,

(д) прямой $x=-2+t, \quad y=2t, \quad z=1-\dfrac{1}{2}t.$

Решение. Изложенная выше теория говорит: знать прямую означает знать одну её точку и один вектор, коллинеарный прямой. Точка у нас есть. В задаче (а) вектор тоже есть. Поэтому по формулам (3) сразу пишем

ответ: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$.

В задаче (б) в качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять направляющий вектор заданной прямой, координаты которого – это знаменатели в уравнениях (б), поскольку эти прямые параллельны. Таким образом, получаем

ответ: $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

В задачах (в) и (г) достаточно сообразить, что направляющие векторы координатных осей x и y можно взять в виде $\{1,0,0\}$ и $\{0,1,0\}$, соответственно. Отсюда получаем соответствующие прямые

ответы: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{0}$ и $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{0}$.

Наконец, в задаче (д), как следует из (3), координаты направляющего вектора – это коэффициенты при t в равенствах (д). Отсюда

ответ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1/2}$.

ПРИМЕР 2. Написать параметрические представления и канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Применить результат к следующим парам точек:

(а) $M_1(1,-2,1)$, $M_2(3,1,-1)$; (б) $M_1(3,-1,0)$, $M_2(1,0,-3)$.

Для решения поставленной задачи в общем виде заметим, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ есть направляющий вектор искомой прямой. В качестве фиксированной точки прямой, которая необходима для написания требуемых уравнений, возьмём, например, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда можно сразу написать уравнения прямой в соответствии с (2) и (3):

Параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

Канонические уравнения:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя теперь заданные числа, получаем результаты для конкретных случаев:

(а) $$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 1-2t \end{cases}, \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2};$$

(б) $$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -1+t \\ z = -3t \end{cases}, \qquad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Закончив с примерами, обсудим следующий вопрос: как можно судить о взаимном расположении двух прямых в пространстве, если они заданы своими параметрическими (или каноническими – это не принципиально) уравнениями. Пусть прямая Δ задана представлением (1), а прямая Δ' – представлением

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{l}\,' \cdot t'. \qquad (1')$$

Возможны следующие варианты взаимного расположения этих прямых:

(1). ***Прямые параллельны*** (рис. 2а). Очевидно, это равносильно тому, что векторы $\vec{l}$ и $\vec{l}'$ коллинеарны, но вектор $\vec{r}_0' - \vec{r}_0$ им не коллинеарен.

(2). ***Прямые совпадают*** (рис. 2б). В этом случае все три вектора $\vec{l}, \vec{l}'$ и $\vec{r}_0' - \vec{r}_0$ коллинеарны.

(3). ***Прямые пересекаются*** (рис. 2в). Это значит, что $\vec{l}$ и $\vec{l}'$ не коллинеарны, но все три вектора $\vec{l}, \vec{l}'$ и $\vec{r}_0' - \vec{r}_0$ компланарны.

(4). ***Прямые скрещиваются*** (рис 2г). При этом все три вектора $\vec{l}, \vec{l}'$ и $\vec{r}_0' - \vec{r}_0$ не компланарны

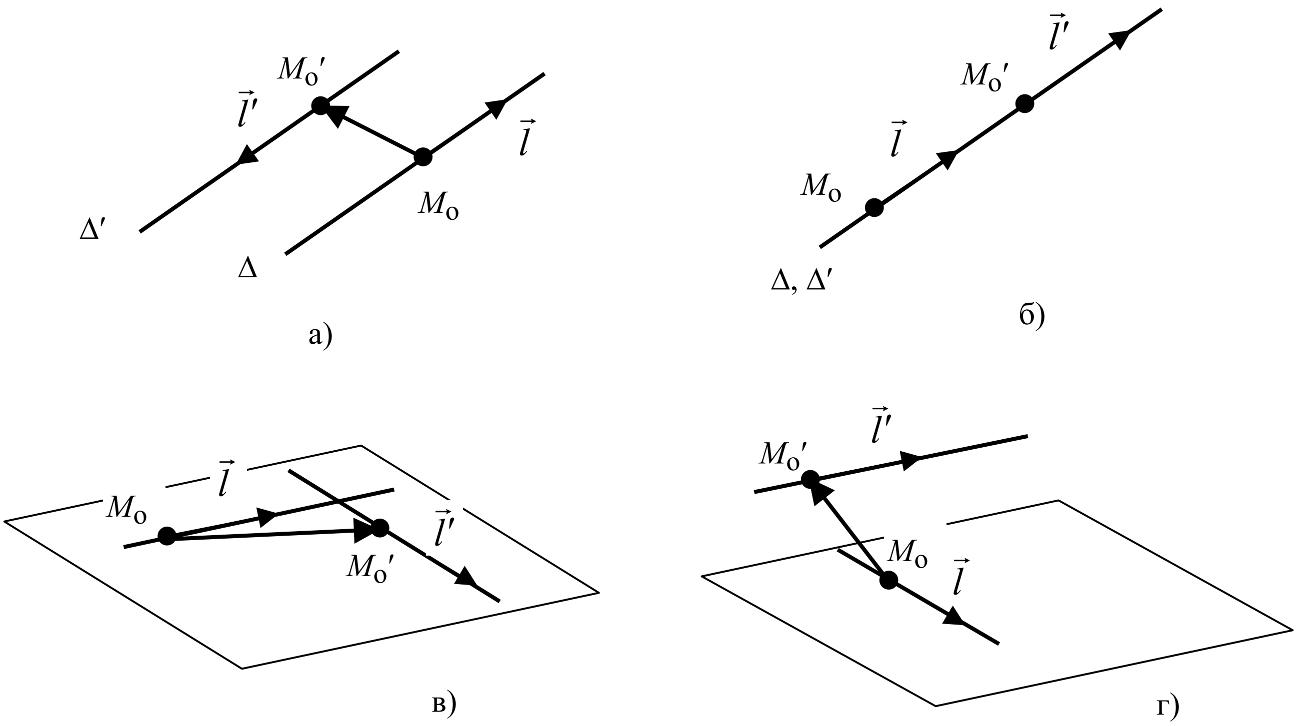

Рис.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Мы видим, что решение вопроса о взаимном расположении прямых, заданных параметрически, сводится к исследованию линейной зависимости некоторых систем векторов.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда прямая рассматривается не в трёхмерном пространстве, а на плоскости. Аффинная система координат имеет в этом случае базис из двух неколлинеарных векторов. Соответственно, имеются только две координаты, которые мы обозначим x, y. Параметрическое представление прямой на плоскости в векторной форме имеет, естественно, прежний вид (1). Однако координатные соотношения (2), (3) упрощаются и принимают соответственно форму

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 \cdot t \\ y = y_0 + l_2 \cdot t \end{cases}, \qquad \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2}. \tag{4}$$

Если в последнем равенстве (4) избавиться от знаменателей, то оно легко приводится к уравнению

$$Ax + By = C, \tag{5}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля (поскольку $A = l_2, \quad B = -l_1, \quad C = l_2 x_0 - l_1 y_0$). Уравнение (5) получается и в случае, когда одна из координат направляющего вектора обращается в ноль, что легко проверить.

Уравнение (5) *называется* ***общим уравнением прямой на плоскости***.

Отметим частные случаи уравнения (5) (***неполные*** *уравнения прямой на плоскости*). Очевидно, что:

$C = 0 \Leftrightarrow$ прямая Δ проходит через начало координат,

$A = 0 \Leftrightarrow$ прямая Δ параллельна оси *Ox* или совпадает с ней,

$B = 0 \Leftrightarrow$ прямая Δ параллельна оси *Oy* или совпадает с ней.

Наконец, если прямая не параллельна оси *Oy*, т.е. $B \neq 0$, равенство (5) эквивалентно равенству

$$y = kx + b, \tag{6}$$

где $k = -A/B, \; b = C/B$.

Соотношение (6) *называется* ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. Оно хорошо известно из средней школы для случая, когда базис системы координат *Oxy* состоит из двух взаимно перпендикулярных векторов единичной длины. При этом ***угловой коэффициент*** *k* действительно является тангенсом угла наклона прямой к оси *Ox*.

4.6. Аналитическое представление плоскости

Рассмотрим какую-либо плоскость П в пространстве *E* (рис. 1). Чтобы зафиксировать её индивидуальность, достаточно зафиксировать некоторую её точку M_0 и два неколлинеарных вектора $\vec{l_1}, \vec{l_2}$, параллельных этой плоскости (отложим их от точки M_0). Предположим, что в пространстве выбрана точка O – начало отсчёта.

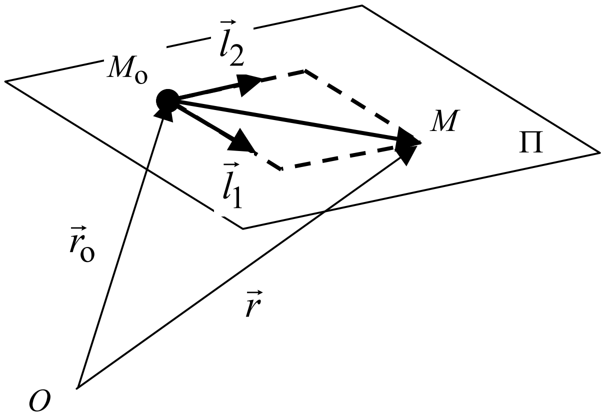

Рис. 1. Задание плоскости.

Пусть точка M – произвольная точка плоскости Π. Обозначим $\overrightarrow{r_0}$, $\vec{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Из рис. 1 видно, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ единственным образом разлагается по векторам $\vec{l}_1, \vec{l}_2$, т.е. существует единственная упорядоченная пара чисел s, t такая, что выполняется соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{l}_1 \cdot s + \vec{l}_2 \cdot t. \qquad (1)$$

Это соотношение называется ***параметрическим представлением плоскости*** Π ***в векторной форме***. Оно представляет собой функцию пары действительных параметров s и t, которая осуществляет взаимно однозначное отображение числовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на множество точек плоскости Π.

Если, в дополнение к началу отсчёта O, в пространстве имеется базис, а значит и аффинная система координат $Oxyz$, то, вводя координаты векторов, фигурирующих в (1), получаем вместо одного векторного равенства (1) три числовых:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_{11} \cdot s + l_{21} \cdot t \\ y = y_0 + l_{12} \cdot s + l_{22} \cdot t, \\ z = z_0 + l_{13} \cdot s + l_{23} \cdot t \end{cases} \qquad (2)$$

Это – ***параметрическое представление плоскости в координатной, или скалярной форме.***

Можно проверить, что, исключив из системы трёх уравнений (2) переменные s и t, мы получим одно соотношение с тремя переменными x, y, z, имеющее вид

$$Ax + By + Cz = D, \qquad (3)$$

где A, B, C, D – фиксированные числа, из которых первые три не обращаются в ноль одновременно. *Соотношение* (3) *называется **общим уравнением плоскости***.

ПРИМЕР 1. Плоскость задана параметрически

$$\begin{cases} x = -1 + s - 2t \\ y = 1 + s + t \\ z = 2 - 3s + t \end{cases}.$$

Найти её общее уравнение.

Решение. Выражаем s из первого уравнения системы: $s = x + 2t + 1$. Подставляя это выражение в два оставшихся равенства, получаем систему

$$\begin{cases} y = x + 3t + 2 \\ z = -3x - 8t + 2 \end{cases}.$$

Исключая из этих уравнений t, находим ответ: $x + 8y + 3z = 22$.

ПРИМЕР 2. Написать параметрическое представление плоскости, заданной общим уравнением $-2x + y - z = 0$.

Решение. Выразим из данного уравнения одну переменную, например z, через две другие. Результат запишем в виде

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - 2x + y \end{cases}$$

Это и есть ответ, ибо можно считать переменные x и y, принимающие любые значения, параметрами. В этом случае (см. рис. 1)

$$\vec{r}_0\{0, 0, 1\},\ \vec{l}_1\{1, 0, -2\},\ \vec{l}_2\{0, 1, 1\}.$$

ПРИМЕР 3. Написать параметризацию и общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0,1,2)$ параллельно векторам $\{2,0,1\}$, $\{1,1,0\}$.

Решение. Параметризацию получаем непосредственно по формулам (2):

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + s \end{cases}.$$

Исключая, аналогично предыдущему примеру, параметры s и t, находим общее уравнение плоскости: $x - y - 2z = -5$.

ПРИМЕР 4. Написать параметризацию и общее уравнение плоскости, проходящей через заданные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Решение. В качестве точки M_0 (рис. 1) возьмём точку M_1, а в качестве направляющих векторов примем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\ z_2 - z_1\}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1\ z_3 - z_1\}$. Получим параметризацию:

$$\begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{cases}. \qquad (4)$$

Исключая из этих уравнений, как показано выше, параметры s и t, найдём общее уравнение плоскости. Однако можно поступить иначе. Сразу выпишем условия принадлежности точек M_1, M_2, M_3 плоскости в виде:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = D \end{cases} \qquad (5)$$

Решая затем эту систему относительно неизвестных A, B, C, D, получим коэффициенты искомого общего уравнения плоскости.

Пусть, скажем, даны конкретные точки

$$M_1(1,2,0), M_2(2,1,1), M_3(3,0,1).$$

Тогда формулы (4) дают

$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 - s - 2t \\ z = s + t \end{cases},$$

откуда, исключая параметры s и t, имеем $x+y=3$. Тот же результат получим, если решать систему вида (5):

$$\begin{cases} A+2B=D \\ 2A+B=D \\ 3A+C=D \end{cases}$$

при дополнительном условии, что A, B, C не равны нулю одновременно.

Аналогично случаю прямой, остановимся на ***неполных общих уравнениях плоскости***:

- отсутствие в уравнении (3) правой части ($D = 0$) эквивалентно тому, что плоскость проходит через начало координат.

- обращение в ноль одного из коэффициентов A, B или C означает, что плоскость параллельна соответствующей оси координат. Например, плоскость вида $By+Cz=D$ параллельна оси Ox. В самом деле, возьмём какую-либо точку (x_0, y_0, z_0) такой плоскости, т.е. точку, удовлетворяющую уравнению

$$By_0 + Cz_0 = D. \tag{6}$$

Любая точка (x, y_0, z_0), с произвольным x, также должна лежать в данной плоскости, поскольку она удовлетворяет уравнению (6). Таким образом, вся прямая $x=t,\ y=y_0,\ z=z_0$ лежит в этой плоскости. Но эта прямая параллельна оси Ox. Значит и вся плоскость обладает тем же свойством.

- обращение в ноль двух из трёх коэффициентов A, B и C означает, что плоскость параллельна одновременно двум координатным осям, т.е. содержащей их координатной плоскости. Например, плоскость $Cz=D$ параллельна координатной плоскости Oxy.

Теперь обратимся к вопросу об определении ***взаимного расположении двух плоскостей*** с общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ и $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$. Чтобы решить его, следует выяснить, есть ли у этих плоскостей общие точки и каково множество этих точек. Это значит, что надо решить систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}. \tag{7}$$

Возможны следующие варианты:

(а). *Система* (7) *не имеет решений.* Другими словами, плоскости не имеют общих точек, т.е. *являются параллельными*.

В противном случае система имеет решения. Решение этой системы не может быть единственным, ибо это означало бы существование единственной общей точки у двух плоскостей, что геометрически невозможно. Поэтому при решении системы должны появиться свободные неизвестные.

(б). *В системе* (7) *есть одна свободная неизвестная.* Т.е. все три неизвестные линейно выражаются через один произвольный параметр. Иначе говоря, *плоскости* (7) *пересекаются по прямой линии*.

(в). *В системе* (7) *есть две свободные неизвестные*, т.е. все три неизвестные линейно выражаются через два произвольных параметра. Иначе говоря, пересечением данных плоскостей является плоскость. Но это может означать только одно – *данные плоскости совпадают.*

Обратим особое внимание на случай (б). Это ещё один метод аналитического задания прямой в пространстве – как *линии пересечения двух плоскостей*. *В этом смысле система* (7) *с одной свободной неизвестной называется* ***системой общих уравнений прямой в пространстве.***

ПРИМЕР 5. Написать параметрическое представление и канонические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Решаем эту систему, и обнаруживаем, что имеется одна свободная неизвестная, например x:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x, \quad z = -\frac{5}{3}x.$$

В матричной форме это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ \end{pmatrix}.$$

Поэтому параметрическое представление прямой можно записать в виде

$$x = t, \quad y = 1/3 - 4t/3, \quad z = -5t/3,$$

а канонические уравнения – в виде $\frac{x}{0}=\frac{y-1/3}{-4/3}=\frac{z}{-5/3}$. Т.к. направляющий вектор прямой можно выбирать с точностью до числового множителя, окончательно запишем канонические уравнения прямой: $\frac{x}{0}=\frac{y-1/3}{4}=\frac{z}{5}$.

В заключение раздела – несколько слов о взаимном расположении прямой и плоскости. Пусть плоскость задана своим общим уравнением, а прямая – каноническими или параметрическими уравнениями. Следует объединить уравнения прямой и плоскости в одну систему уравнений с тремя неизвестными x, y, z и решить её. Если решений нет, то прямая, очевидно, параллельна плоскости. Если решение одно, прямая и плоскость пересекаются. Если же решений больше одного, то, конечно, прямая лежит на плоскости.

4.7. Полярные координаты

В предыдущих разделах, говоря о координатах точек, мы имели в виду аффинные координаты. Однако, для перевода геометрических фактов на язык чисел применяют и другие системы координат, называемые ***криволинейными***. Мы рассмотрим здесь наиболее употребительную криволинейную систему координат на плоскости, а именно полярные координаты.

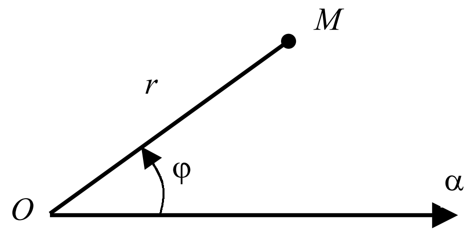

Рис.1.Полярные координаты.

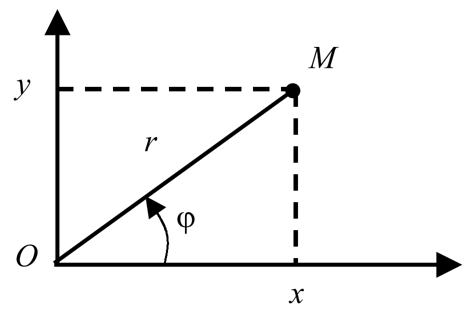

Рис.2.Связь декартовых и полярных координат.

Итак, выберем на плоскости точку O, и назовём её ***полюсом***. Затем выберем луч α, исходящий из полюса, и назовём его ***полярным лучом*** (рис.1). Пусть теперь M – произвольная точка плоскости. Сопоставим ей два числа: полярный радиус r, который определяется как длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, и полярный угол φ, определяемый как угол между полярным лучом и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$

(отсчитываемый против часовой стрелки). *Эти два числа r,* φ *называются* ***полярными координатами*** *точки M.*

В отличие от аффинных координат, соответствие $M \to (r, \varphi)$ *не является взаимно однозначным соответствием между точками плоскости и всевозможными упорядоченными парами чисел*. Во-первых, всегда $r \geq 0$, так что пара (r, φ) с $r < 0$ не может представлять полярные координаты какой-либо точки. Во-вторых, каждой точке *M*, отличной от полюса *O*, соответствует не одно, а множество значений полярного угла φ. Это множество можно записать в виде $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$, где φ_0 - одно из значений полярного угла φ. Для самого же полюса *O* полярный угол вовсе не определён, или, выражаясь по другому, любое число можно считать его полярным углом.

Часто употребляют систему полярных координат, связанную с декартовыми координатами *x*, *y*, как показано на рис. 2: положительный луч оси *Ox* берётся в качестве полярного луча. Тогда декартовы и полярные координаты одной и той же точки оказываются связанными соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{1}$$

позволяющими легко находить декартовы координаты по полярным. Если же надо найти *r*, φ по *x*, *y*, то следует поочередно воспользоваться очевидными формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}. \tag{2}$$

ПРИМЕР 1. На плоскости с декартовыми координатами x, y написать в полярных координатах уравнение окружности радиуса *a* с центром в начале координат.

Решение. Совершенно очевидно, что искомое уравнение имеет вид $r = a$. Это намного проще, чем уравнение той же окружности в декартовых координатах: $x^2 + y^2 = a^2$.

ПРИМЕР 2. Линия, имеющая в полярных координатах уравнение $r = a\varphi$, называется ***спиралью Архимеда*** (рис. 3). С ростом φ она “разворачивается”, и *r* стремится к бесконечности.

ПРИМЕР 3. Линия с уравнением $r = ae^{-k\varphi}$ – это ***логарифмическая спираль*** (рис. 4). С ростом φ она “сворачивается”, и r стремится к нулю.

ПРИМЕР 4. Построить линию с уравнением $r = 5\cos 6\varphi$.

Решение. Поскольку r не может быть отрицательным, φ может принимать только такие значения, при которых $\cos 6\varphi \geq 0$, а значит

$$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В каждом k-ом из этих угловых интервалов r возрастает от нуля до максимального значения 5, затем убывает до нуля, так что образуется “лепесток”, симметричный относительно луча $\varphi = \frac{\pi k}{3}$. В результате получается ***шестилепестковая роза***, изображённая на рис. 5.

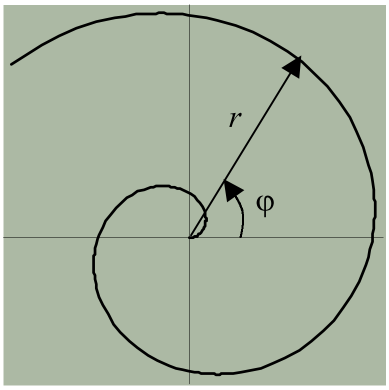

Рис.3.Спираль Архимеда

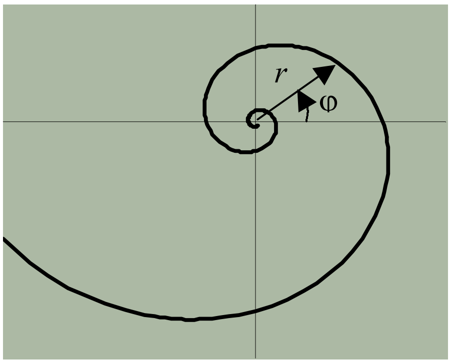

Рис.4.Логарифмическая спираль

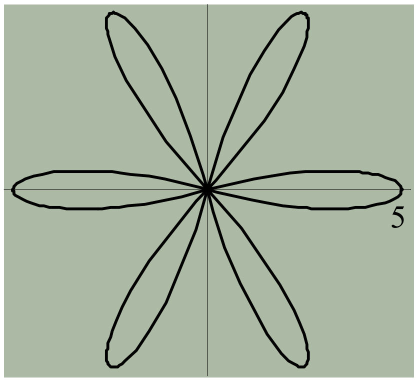

Рис.5.Шестилепестковая роза.

Теоретические вопросы к главе 4.

1. Что такое вектор-отрезок и что такое геометрический вектор?

2. Дать определение сложения геометрических векторов и умножения геометрического вектора на число. Перечислить основные восемь свойств этих операций.

3. Что такое линейная комбинация геометрических векторов? Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Привести примеры.

4. Дать определение базиса множества геометрических векторов и координат вектора в данном базисе. В чём смысл введения этих понятий?

5. Сформулировать аксиоматическое определение векторного пространства.

6. Сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии линейной независимости системы векторов.

7. Что такое размерность векторного пространства? Что такое его базис? Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии того, что данная система векторов некоторого пространства составляет его базис.

8. Привести десять примеров векторных пространств (геометрические векторы, наборы чисел, матрицы, функции).

9. Что такое изоморфизм векторных пространств и в чём смысл этого понятия?

10. Что такое система линейных алгебраических уравнений? Дать определение матрицы системы, расширенной матрицы системы, однородной системы. Как выглядит индексная запись системы? В чём заключается задача исследования системы?

11. Описать алгоритм метода Гаусса исследования СЛАУ. Как отвечает этот метод на вопросы, составляющие исследования системы?

12. Что такое аффинная система координат в пространстве точек евклидовой геометрии? на плоскости? на прямой? Какова цель введения аффинных координат?

13. Как выглядит параметрическое представление прямой в пространстве в векторной и скалярной формах?

14. Что такое канонические уравнения прямой в пространстве? Как перейти от канонических уравнений к параметрическому представлению и наоборот?

15. Как судить о взаимном расположении двух прямых в пространстве по их параметрическим или каноническим уравнениям?

16. Что такое общее уравнение прямой на плоскости и уравнение прямой с угловым коэффициентом?

17. Написать параметрическое представление плоскости в пространстве в векторной и скалярной формах. Получить из параметрического представления общее уравнение плоскости.

18. Как исследовать взаимное расположение двух плоскостей по их общим уравнениям? Что представляет собой система общих уравнений прямой в пространстве?

19. Описать систему полярных координат на плоскости. Как вводятся полярные координаты, связанные с данной системой декартовых координат?