Глава 1. Теория пределов

1.1. Числовые последовательности

Пусть дано некоторое множество *X*. Сопоставим каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ какой-либо определенный элемент $x_n \in X$. Получится функция

$$x_n = f(n) : \mathbb{N} \to X. \qquad (1)$$

*Такая функция называется **бесконечной последовательностью** элементов из X*. Для краткости мы будем в дальнейшем говорить просто ***последовательность***.

Чтобы знать последовательность, достаточно знать все элементы

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

(***члены последовательности*** для всех ***номеров*** 1, 2, 3, …, *n*, …). Поэтому *последовательность часто определяют как упорядоченный (т.е. пронумерованный последовательными натуральными числами) набор элементов из множества X.*

В этой главе мы будем рассматривать только ***числовые последовательности***, т.е. такие, что x_n - это числа.

Существуют два способа наглядной интерпретации числовой последовательности $x_n = f(n)$. Первый из них – *геометрический*. Это просто график функции $x_n = f(n)$, представляющий собой неподвижную картинку. Второй можно назвать *кинематическим*: на оси x отмечаются все значения x_n, и около каждого из них отмечается номер *n*, которому это значение соответствует. При желании *n* можно понимать как дискретные значения времени (например, 1 с, 2 с., 3 с и т.д.), а x_n – как положение движущейся (перескакивающей со временем из одного положения в другое) точки.

ПРИМЕР 1. *Стационарная последовательность*, или *константа* (рис.1)

$$a, a, a, \ldots, \qquad (2)$$

где a – фиксированное число.

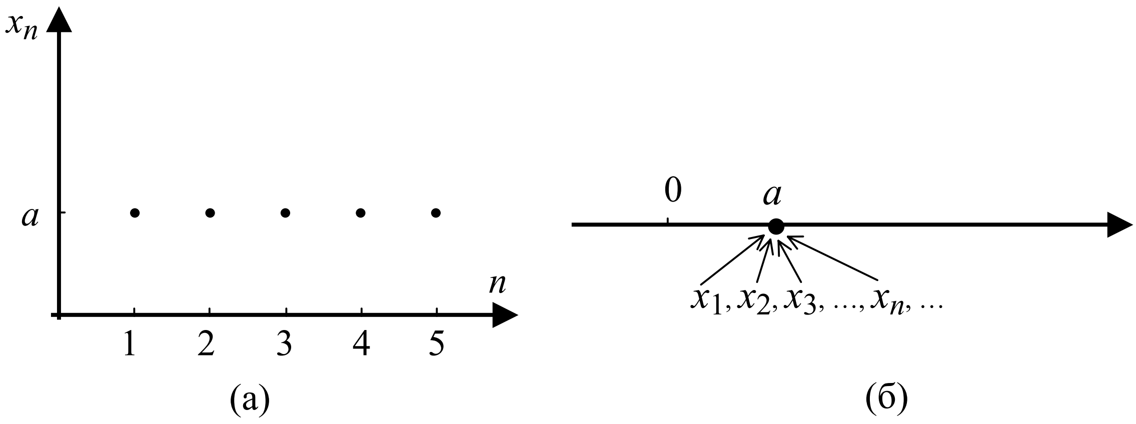


Рис.1 Стационарная последовательность

ПРИМЕР 2. *Арифметическая прогрессия*

$$x_n = a + d(n-1), \tag{3}$$

где a, d - фиксированные числа (*параметры* прогрессии). Рис.2 а,б соответствует прогрессии с $d > 0$, а рис. 2 в,г – прогрессии с $d < 0$.

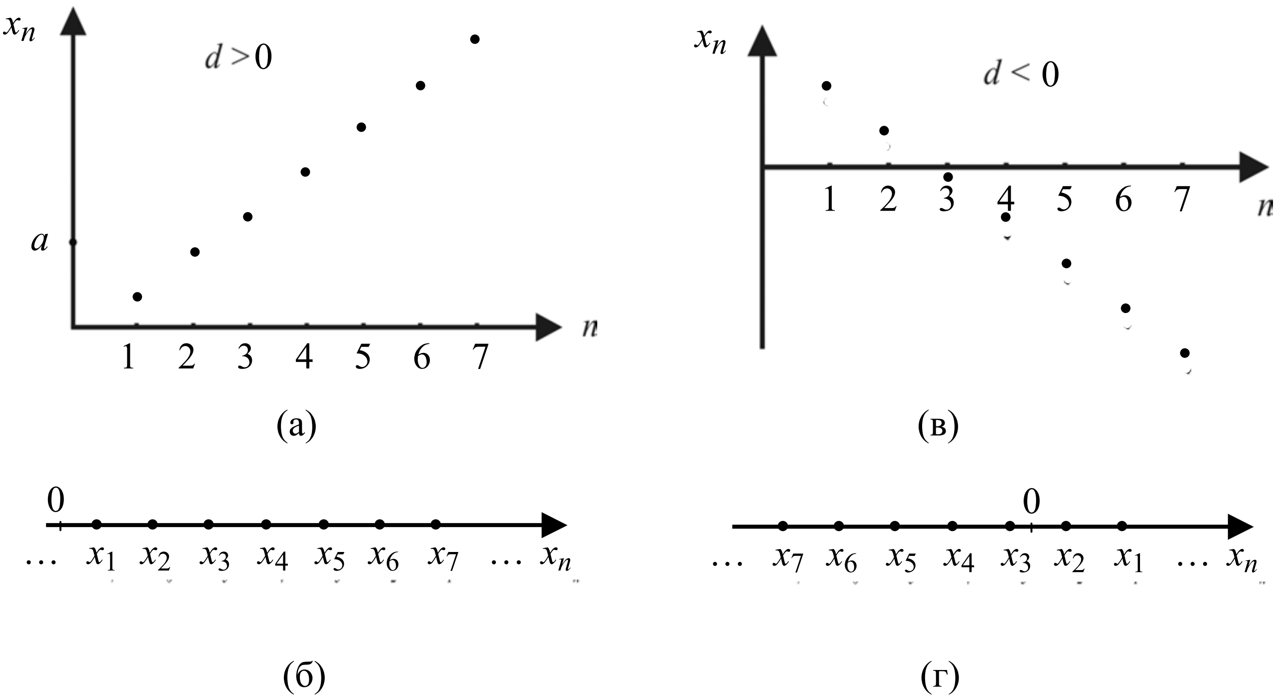


Рис. 2. Арифметическая прогрессия

ПРИМЕР 3. *Геометрическая прогрессия*

$$x_n = aq^{n-1}, \tag{4}$$

где a, q – фиксированы. См. рис.3 а,б,в,г.

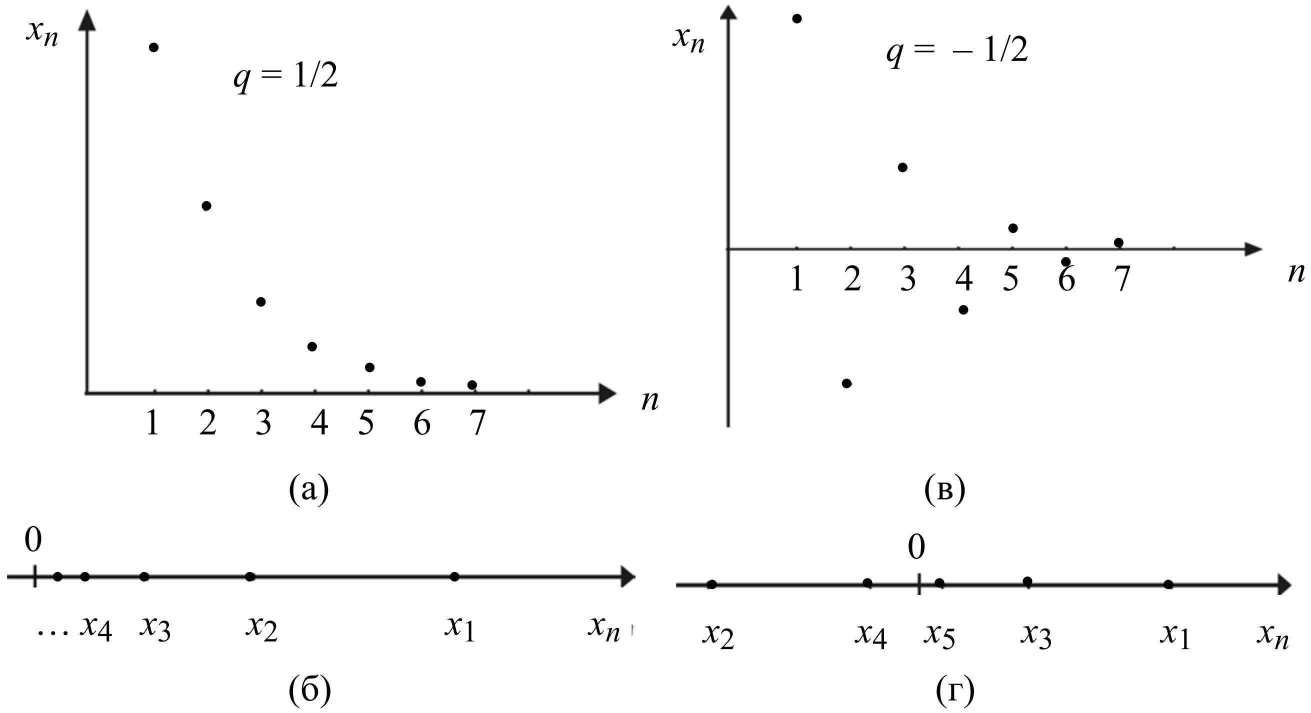


Рис.3. Геометрическая прогрессия.

ПРИМЕР 4. *Последовательности десятичных приближений к числу* π *с недостатком*

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ 3{,}141592;\ 3{,}1415926;\ \ldots$$

и с избытком

$$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ 3{,}14160;\ 3{,}141593;\ 3{,}1415927;\ \ldots.$$

Этот пример напоминает нам, что бесконечные последовательности изучаются не из абстрактных соображений: конкретное (и весьма важное для практики) число π может быть введено только как результат бесконечного количества приближений к нему. Конечной последовательностью тут не обойдешься. Именно поведение последовательности при неограниченно растущих номерах её членов (как говорят, ***асимптотическое поведение*** *последовательности при* $n \to \infty$) имеет главное значение.

Одна из характеристик асимптотического поведения последовательности – это ее "ограниченность" или "неограниченность".

Числовая последовательность называется ***ограниченной*** (***ограниченной снизу, ограниченной сверху***), *если ограничено* (*ограничено снизу, ограничено сверху*) *множество значений этой последовательности.*

Напомним, что *множество М точек числовой оси называется* ***ограниченным сверху*** (***ограниченным снизу***), *если все числа, принадлежащие множеству М, меньше или равны* (*больше или равны*) *некоторого фиксированного числа С. Множество М называется* просто ***ограниченным****, если оно ограничено и сверху и снизу.*

ПРИМЕР 5. Стационарная последовательность (2) ограничена. В самом деле, множество ее значений состоит из единственного числа a.

ПРИМЕР 6. Арифметическая прогрессия (3) ограничена снизу и неограничена сверху в случае $d > 0$ (действительно, добавляя к a число d достаточно много раз, мы, очевидно, превысим любое заранее заданное число).

Если же $d < 0$, то арифметическая прогрессия неограничена снизу и ограничена сверху по аналогичной причине.

Любая арифметическая прогрессия неограничена. (Любая ли? Может быть, есть исключение?)

ПРИМЕР 7. Геометрическая прогрессия (4) ограничена, если $|q| \le 1$ и не ограничена, если $|q| > 1$.

В самом деле, $|x_n| = |a| \cdot |q|^{n-1}$. Поэтому $|x_n| \le a$ при $|q| \le 1$. Если же $|q| > 1$, то $|q| = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$, и тогда

$$|q|^{n-1} = (1+\alpha)^{n-1} = 1 + (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} > 1 + (n-1)\alpha$$

по формуле бинома Ньютона. Тем самым $|x_n|$ растет быстрее, чем некоторая арифметическая прогрессия.

ПРИМЕР 8. Обе последовательности примера 4 ограничены. Например, первая потому, что все ее члены не меньше 3, но, очевидно, не более 4.

Заметим, что любая *конечная* числовая последовательность ограничена. Для бесконечной же последовательности свойство быть ограниченной (в том или ином смысле) не меняется, если отбросить любое конечное число ее первых членов. Это подтверждает, что свойство ограниченности – асимптотическое свойство последовательности.

Мы подошли к самому важному определению настоящего раздела.

Числовая последовательность x_n *называется* ***сходящейся к числу*** *a, если разность между* x_n *и a с ростом номера n становится как угодно малой* (см. рис.4). Точнее – *если для любого заданного числа* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что при* $n \geq N(\varepsilon)$ *выполняется соотношение* $|x_n - a| < \varepsilon$. *При этом число a называется* ***пределом*** *последовательности* x_n.

С помощью сокращающих символов ∀ (для любого) и ∃ (найдется) это определение выражается следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \{n \geq N(\varepsilon)\} \Rightarrow \{|x_n - a| < \varepsilon\}. \qquad (5)$$

Его можно сформулировать еще и так: *последовательность* x_n *сходится к a, если для любого* $\varepsilon > 0$ *все ее члены, начиная с некоторого номера, лежат в ε-окрестности точки a.*

Факт сходимости x_n к a записывается одним из следующих способов:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n; \qquad x_n \to a \text{ при } n \to \infty. \qquad (6)$$

Символ *lim* – это сокращение латинского слова *limes* – предел.

Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Геометрически (на графике функции $x_n = f(n)$) утверждение (6) означает: какую бы полосу $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ вокруг прямой $x = a$ мы ни выбрали, найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ все точки графика попадают в указанную полосу (см. рис. 4).

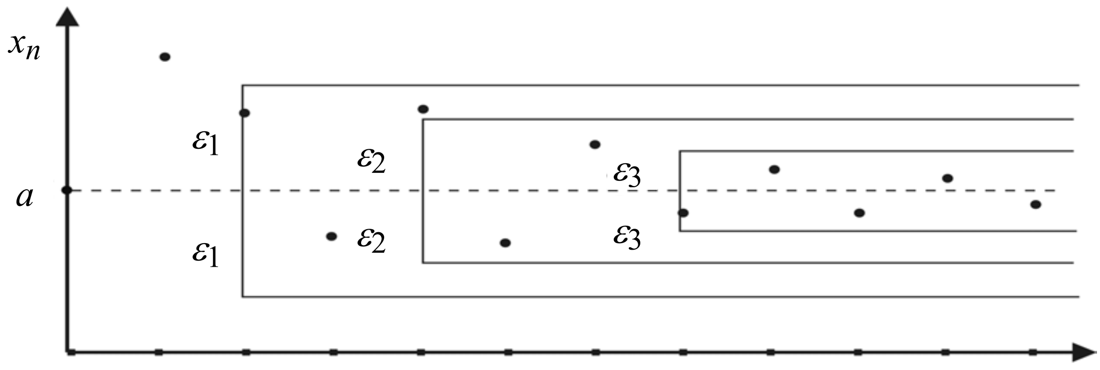


Рис. 4. К определению предела последовательности.

ПРИМЕР 9. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

Решение. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Надо доказать, что неравенство $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ выполняется для всех натуральных *n*, начиная с некоторого. Для этого следует просто решить это неравенство относительно *n*, считая ε заданным. Очевидно, это неравенство переписывается в виде $\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$ или, еще проще, в виде $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Т.е. исходное неравенство выполняется для всех натуральных чисел, превосходящих $1\setminus\sqrt{\varepsilon}$. Например, при $\varepsilon=0{,}1$ должно быть $n>\dfrac{1}{\sqrt{0{,}1}}=\sqrt{10}=3{,}16\ldots$. Значит, начиная с номера $N(\varepsilon)=N(0{,}1)=4$, неравенство верно. Если же $\varepsilon=0{,}01$, то $n>\dfrac{1}{\sqrt{0{,}01}}=\sqrt{100}=10$. Следовательно, $N(0{,}01)=11$.

ПРИМЕР 10. Доказать, что $\dfrac{n}{n+1}\to1$ при $n\to\infty$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. Упрощая его, получаем последовательно: $\left|\dfrac{n-(n+1)}{n+1}\right|<\varepsilon$, $\left|-\dfrac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$, $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$, $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. Очевидно, $N\left(\dfrac{1}{10}\right)=10$, $N\left(\dfrac{1}{100}\right)=100$, $N\left(\dfrac{1}{1000}\right)=1000$.

Рассмотрим теперь основные общие свойства предела последовательности.

Теорема 1 (о единственности предела). *Последовательность может сходиться только к одному пределу.*

Доказательство. Пусть последовательность сходится к двум разным пределам a и a'. Выберем ε меньше половины расстояния между ними, т.е.

положим $\varepsilon < \frac{1}{2}|a-a'|$. Найдутся номера $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что при $n \geq N_1(\varepsilon)$ будет $|x_n - a| < \varepsilon$, а при $n \geq N_2(\varepsilon)$ будет $|x_n - a'| < \varepsilon$. Поэтому при n большем, чем $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, точка должна попадать в ε - окрестность числа a и в ε - окрестность числа a', что невозможно, т.к. эти окрестности не имеют общих точек.

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность x_n сходится к пределу a. Рассмотрим какую-либо ε-окрестность точки a. Все числа x_n, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, попадают в нее, т.е.

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Поэтому любой член x_n последовательности не превосходит наибольшего из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)-1}, a+\varepsilon$. Значит, последовательность x_n ограничена сверху. Аналогично доказывается ее ограниченность снизу.

Обратная теорема не имеет места, т.е. *существуют ограниченные, но расходящиеся последовательности*, например, $x_n = (-1)^n$. Таким образом, *класс сходящихся числовых последовательностей составляет лишь часть класса ограниченных последовательностей*. Иными словами, последовательность может расходиться либо потому, что она неограничена, либо потому, что, хоть она и ограничена, но колебания значений x_n не уменьшаются до нуля с ростом номера n.

ПРИМЕР 11. Стационарная последовательность $x_n = a = const$ очевидным образом сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

ПРИМЕР 12. Арифметическая прогрессия при $d \neq 0$ расходится, т.к. она неограничена.

ПРИМЕР 13. Геометрическая прогрессия $x_n = aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$ расходится, если $|q| > 1$, т.к. в этом случае она неограничена.

При $q = -1$ она также расходится, хотя и ограничена.

При $q = 1$ это стационарная последовательность $x_n = a$, поэтому она сходится к пределу a.

Наконец, при $|q|<1$ геометрическая прогрессия сходится к 0.

В самом деле, $\left|aq^{n-1}-0\right|=\left|aq^{n-1}\right|=|a||q|^{n-1}$, и надо выяснить, может ли это число стать меньше любого $\varepsilon>0$ с ростом номера n. Следовательно, надо рассмотреть неравенство $|a||q|^{n-1}<\varepsilon$ относительно неизвестного n при заданных a, $|q|<1$ и ε. Оно эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^{n-1}>\frac{|a|}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Действуя, как в примере 7, замечаем, что $\left(\frac{1}{|q|}\right)^{n-1}>1+(n-1)\alpha$ с положительным α. Очевидно, если будет $1+(n-1)\alpha>\frac{|a|}{\varepsilon}$, то выполнится и (7). Значит, при $n>1+\left(\frac{|a|}{\varepsilon}-1\right)\frac{1}{\alpha}$ получим $\left|aq^{n-1}-0\right|$, что и требовалось.

Выводы:

$$\lim_{n\to\infty} aq^{n-1}=0 \quad \text{при} \quad |q|<1,$$

$$\lim_{n\to\infty} aq^{n-1}=a \quad \text{при} \quad q=1.$$

В остальных случаях геометрическая прогрессия расходится.

ПРИМЕР 14. Вернемся к приближенным значениям числа π (пример 4). По самой идее построения этих значений (заключение точки π числовой оси в интервалы длиной $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \ldots,\ \frac{1}{10^n},\ \ldots$) ясно, что разность между π и его приближениями делается, с ростом номера приближения, меньше любого числа. Это значит, что π *есть предел последовательности своих десятичных приближений*. Очевидно, *это верно не только для* π, *но и для любого другого числа*.

Закончив с серией примеров, поставим следующий вопрос: пусть дана последовательность x_n. Как узнать, сходится ли она, и если да, то каков ее предел. Пока для этого у нас есть один инструмент – само определение сходимости последовательности. Чтобы пользоваться им, надо иметь число a – "претендента" на звание предела. Тогда мы можем рассмотреть неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ и попытаться решить его относительно неизвестного n. Если удается показать, что при любом $\varepsilon > 0$ ему удовлетворяют все n, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$, то $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Если окажется, что хотя бы при одном $\varepsilon > 0$ это не так, то a не является пределом x_n.

А что делать, если "претендент" не виден? Как, не зная его, решить поставленный нами вопрос? На этот счет имеются различные рецепты. Они называются ***признаками сходимости*** (или ***расходимости***). Самые важные и практичные из них мы ниже рассмотрим. Впрочем, один такой признак мы уже знаем – это теорема 2. Если удастся установить неограниченность последовательности, то она, в силу этой теоремы, наверняка расходится.

Теорема 3 (о связи операции перехода к пределу числовой последовательности с арифметическими операциями).

Рассмотрим числовые последовательности x_n *и* y_n. *Если существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *то:*

а) *Существует предел последовательности* $x_n + y_n$ *(суммы данных последовательностей), причем*

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{8}$$

б) *Существует предел последовательности* $x_n \cdot y_n$ *(произведения данных последовательностей), причем*

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \tag{9}$$

в) *Если, к тому же,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то, начиная с некоторого номера, определена последовательность* $\dfrac{x_n}{y_n}$ *(отношение данных последовательностей). Она сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \tag{10}$$

Доказательство. Введем обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и зафиксируем число $\varepsilon > 0$.

а) Оценим разность $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Имеем

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Найдутся номера $N(\varepsilon)$ и $N'(\varepsilon)$ такие, что $n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

$n \ge N'(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому при $n \ge \max\{N(\varepsilon), N'(\varepsilon)\}$ получим

$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требуется.

б) Оценим разность $|x_n y_n - xy|$. Имеем

$$|x_n y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \le |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|.$$

Поскольку сходящаяся последовательность x_n ограничена, найдется число $M > 0$ такое, что $|x_n| < M$, $\forall n$. Найдется число $M' > 0$ такое, что $|y| < M'$. Поэтому $|x_n y_n - xy| < M|y_n - y| + M'|x_n - x|$. Подберем номера n_0 и n_0' так, чтобы $n \ge n_0 \Rightarrow |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$; $n \ge n_0' \Rightarrow |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2M'}$. Тогда при $n \ge \max\{n_0, n_0'\}$ получим $|x_n y_n - xy| < M\dfrac{\varepsilon}{2M} + M'\dfrac{\varepsilon}{2M'} = \varepsilon$, что и требуется.

в) Поскольку $y \ne 0$, окрестность точки y, имеющая радиус $\dfrac{|y|}{2}$, не содержит нуля, но содержит все y_n, начиная с некоторого номера n_0 (см. рис. 5).

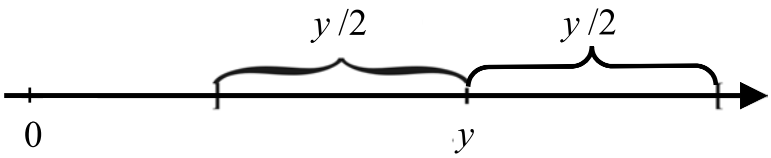


Рис. 5. К доказательству теоремы 3.

Итак, $\{n \ge n_0\} \Rightarrow \left\{y_n \ne 0, \quad |y_n| > \dfrac{1}{2}|y|\right\}$. Оценим теперь разность $\left|\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{1}{y}\right|$.

Имеем при $n \ge n_0$:

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-y_n}{y_n y}\right|=\frac{|y-y_n|}{|y_n||y|}<\frac{2|y-y_n|}{|y|^2}.$$

Начиная с некоторого номера n_0' можем написать $|y-y_n|<\frac{|y|^2\varepsilon}{2}$. Поэтому при $n\ge\max\{n_0,n_0'\}$ получаем $\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right|<\frac{2}{|y|^2}\cdot\frac{|y|^2\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{y}$. По доказанному в пункте б) имеем:

$$\exists\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot\frac{1}{y_n})=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{x}{y}.$$

Этим доказательство теоремы завершается.

Заметим, что эта теорема не только дает достаточные условия для сходимости некоторых последовательностей (сумм, произведений и отношений сходящихся последовательностей), но и формулы для вычисления их пределов.

Следствие. Если $x_n\to x$ и $y_n\to y$ при $n\to\infty$, а α и β - два числа, то $\alpha x_n+\beta y_n\to\alpha x+\beta y$ при $n\to\infty$. *Это свойство называется* ***линейным свойством*** *сходящихся последовательностей.*

В частности, $x_n-y_n\to x-y$, если $x_n\to x$ и $y_n\to y$.

ПРИМЕР 15.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n}-\frac{2}{n^2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}\cdot1-2\cdot0=\frac{1}{3}$$

(см. примеры 9,10).

ПРИМЕР 16. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{3}{4}.$$

ПРИМЕР 17. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}$.

Здесь нельзя непосредственно применить теорему о пределе отношения, т.к. и числитель, и знаменатель предела не имеют, они неограничены. В таких случаях говорят, что *асимптотика последовательности представляет собой*

неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$**.** Однако, простое преобразование решает эту задачу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

ПРИМЕР 18. Идея предыдущего примера работает во всех случаях, когда ищется предел отношения многочленов относительно n – надо вынести за скобки старшую степень n и вверху и внизу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)(3n+5)(4n-6)}{3n^3+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\dfrac{3}{n}\right)\left(3+\dfrac{5}{n}\right)\left(4-\dfrac{6}{n}\right)}{n^3\left(3+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}=8.$$

ПРИМЕР 19. Ту же идею можно использовать и при раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ в некоторых иррациональных выражениях. Вычислим предел $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

Вынесем из-под радикалов старшую степень n и вверху и внизу. Очевидно, что это первая степень. Получим:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}-\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^5}}\right)}.$$

Неопределенность исчезла, и окончательно имеем $L=\dfrac{-1}{-1}=1$.

Теорема 4 (о переходе к пределу в неравенствах).

Пусть $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ *и* $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. *Если, начиная с некоторого номера,* $x_n\le y_n$, *то* $x\le y$. *Если* $x<y$, *то* $x_n<y_n$, *начиная с некоторого номера.*

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Если предположить, что $x > y$, то (см. рис.6) взяв окрестности точек *x, y* с радиусами, меньшими $\frac{1}{2}(x-y)$, получим, что $y_n < x_n$ при больших *n*. Это противоречит условию. Доказательство второго утверждения очевидно из рис.7.

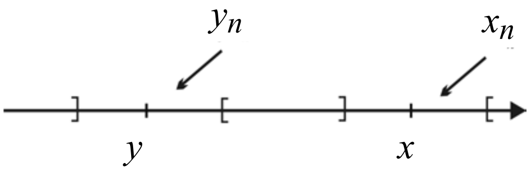


Рис.6.

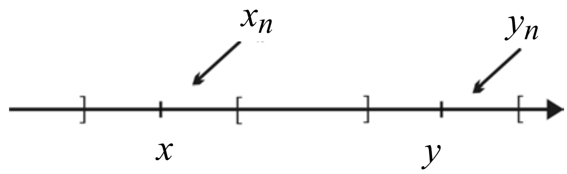


Рис.7.

К доказательству теоремы 4.

Теорема 5 (признак Вейерштрасса существования предела последовательности). *Если числовая последовательность x_n ограничена сверху, и ее члены не убывают ($x_{n+1} \geq x_n$), начиная с некоторого номера, то она сходится.*

Мы не будем приводить строгого доказательства этой теоремы. Сошлемся на ее интуитивную очевидность (если точки x_n с ростом номера *n* могут двигаться только в одну сторону по оси *x*, причем их суммарный сдвиг ограничен, то они вынуждены вплотную подойти к некоторой фиксированной точке).

Заметим только, что заключение теоремы, очевидно, остается в силе, если последовательность x_n ограничена снизу, и ее члены не возрастают ($x_{n+1} \leq x_n$).

ПРИМЕР 20. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{11}$$

и докажем, что она сходится, используя признак Вейерштрасса. Теорему о пределе произведения здесь применить нельзя, поскольку число сомножителей не постоянно, а зависит от *n*. Получается "***неопределенность вида*** 1^∞".

С помощью бинома Ньютона запишем

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + ... + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} + \ldots +$$

$$+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n!}=$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}.$$

Если заменить в этих формулах n на $n + 1$, то в получающейся сумме каждое выражение в скобках будет больше соответствующего выражения для x_n. Кроме того, в сумме будет на одно слагаемое больше. Поэтому $x_{n+1} \geq x_n$.

Осталось доказать ограниченность последовательности x_n. Продолжая выкладку, имеем

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Но для любого n справедлива оценка $\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}$, где в знаменателе имеются $n-1$ одинаковых множителей. Таким образом, суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$x_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}<3.$$

Итак, последовательность x_n не убывает и ограничена сверху. Поэтому она сходится. Ее предел обычно обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (12)$$

Можно показать, что число e иррационально. Из наших выкладок видно, что $2 < e < 3$. Расчеты показывают, что

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

В математике регулярно применяются логарифмы по основанию e. Они называются ***натуральными логарифмами***. Применяется специальный символ

$$\ln x=\log_e x. \qquad (13)$$

Еще один признак сходимости последовательности:

Теорема 6 (о двух милиционерах). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ *и для всех номеров n, начиная с некоторого,* $x_n \le y_n \le z_n$, *то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера имеем $|x_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$ и $-\varepsilon < x_n - a \le y_n - a \le z_n - a < \varepsilon$, т.е. $|y_n - a| < \varepsilon$, что и требуется.

Среди всех сходящихся числовых последовательностей особой популярностью в теоретических рассуждениях и практических выкладках пользуются ***бесконечно малые последовательности****, т.е.* ***последовательности, сходящиеся к нулю***. Причина этого объясняется следующим утверждением.

Теорема 7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff x_n = x + \alpha_n$, *где последовательность* α_n *бесконечно мала.*

Доказательство. Чтобы убедиться в эквивалентности двух соотношений, фигурирующих в формулировке теоремы, достаточно записать на ε-языке, что они означают. А они означают, что начиная с некоторого номера для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соответственно неравенства $|x_n - x| < \varepsilon$ и $|(x_n - x) - 0| < \varepsilon$. Ясно, что эти неравенства совпадают.

Теорему можно высказать иначе: *члены сходящейся последовательности отличаются от её предела на бесконечно малую.*

Можно также сказать: *член сходящейся последовательности* x_n *можно приближенно заменить пределом этой последовательности; абсолютная ошибка такого приближения бесконечно мала при* $n \to \infty$.

ПРИМЕР 21. Последовательности

$$\frac{1}{n};\quad \frac{(-1)^n}{n^2};\quad q^n \text{ при } |q|<1;\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e;\quad x_n = 0$$

бесконечно малы. Убедитесь в этом.

Если $x_n \to 0$ *и все* x_n*, начиная с некоторого, положительны, то последовательность* x_n *называют* ***положительной бесконечно малой*** *и пишут* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +0$ или "$x_n \to +0$ при $n \to \infty$".

Аналогично определяется ***отрицательная бесконечно малая последовательность***, для которой пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -0 \text{ или "}x_n \to -0 \text{ при } n \to \infty\text{".}$$

ПРИМЕР 22. Из последовательностей примера 21 выберите положительные бесконечно малые и отрицательные бесконечно малые.

Последовательность x_n называют ***бесконечно большой***, если последовательность $\dfrac{1}{x_n}$ бесконечно мала.

Поскольку неравенства $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ и $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ эквивалентны, то высказанное определение эквивалентно утверждению: *последовательность бесконечно велика, если ее члены с ростом номера становятся по абсолютной величине больше любого числа.*

Тот факт, что последовательность бесконечно велика, записывают обычно так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \text{ или “}x_n \to \infty \text{ при } n \to \infty\text{”.}$$

Если, при этом, начиная с некоторого номера, $x_n > 0$, то говорят, что x_n – ***положительная бесконечно большая последовательность***. Это пишут как

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \text{ или “}x_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty\text{”.}$$

Аналогично определяется ***отрицательная бесконечно большая последовательность***, для которой пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ или “}x_n \to -\infty \text{ при } n \to \infty\text{”.}$$

ПРИМЕР 23. Из последовательностей примера 21 образуйте бесконечно большие последовательности. Выберите из полученных последовательностей положительные бесконечно большие и отрицательные бесконечно большие.

1.2. Предел функции

В предыдущем разделе мы уже изучали предел функции, но там ситуация была довольно специфической: речь шла о последовательности, т.е. о функции дискретного аргумента. С другой стороны, очень многие функции математически моделируют изменение той или иной величины, например, давления, скорости и т.д. в зависимости от времени или пространственной координаты, т.е. в зависимости от непрерывно меняющейся величины.

Поэтому теперь мы будем изучать функции вида

$$y = f(x) : X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $X \subset \mathbb{R}$ есть интервал или совокупность нескольких непересекающихся интервалов числовой оси, т.е. множество, в котором независимая переменная имеет возможность изменяться непрерывным образом.

Функция (1) называется ***ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)*** на множестве $A \subset X$, если соответствующим свойством обладает множество $f(A)$ ее значений на множестве A.

ПРИМЕР 1. Функция $y = \dfrac{1}{x} : \{x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ не ограничена на своей области определения ни сверху, ни снизу; на множестве $\{x > 0\}$ она ограничена снизу, но не сверху; на множестве $\{x \geq 1\}$ она ограничена. Если вам это не очевидно сразу, постройте график функции.

Одной из главных задач исследования функции (1) является определение ее поведения при приближении аргумента x "вплотную" (как угодно близко) к фиксированному числу x_0. Свойства функции, проявляющиеся при таком приближении, называются ее ***локальными***, или ***асимптотическими*** свойствами при $x \to x_0$ (при x, стремящемся к x_0).

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку x_0 внутри себя, за исключением, может быть, самой точки x_0.

Эта функция называется ***ограниченной при*** $x \to x_0$, если она ограничена на некотором множестве вида

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad \delta > 0 \tag{2}$$

т.е., как говорят иногда, на ***выколотой δ-окрестности*** точки x_0.

Аналогичные определения даются для ***ограниченности*** $f(x)$ ***сверху*** или ***снизу*** при $x \to x_0$.

Мы подошли к центральному определению этого раздела – определению предела функции в точке.

Пусть по-прежнему функция $y = f(x)$ определена в некоторой выколотой окрестности точки x_0. *Число a называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** *x,* ***стремящемся к*** x_0, *если разность между* $f(x)$ *и a, с приближением x к* x_0, *становится как угодно малой* (см. рис. 1). Точнее – *если для любого заданного числа ε > 0 найдется число δ* (ε) *такое, что при* $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *выполняется соотношение* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Сокращенно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \{|x - x_0| < \delta(\varepsilon)\} \Rightarrow \{|f(x) - a| < \varepsilon\} \qquad (3)$$

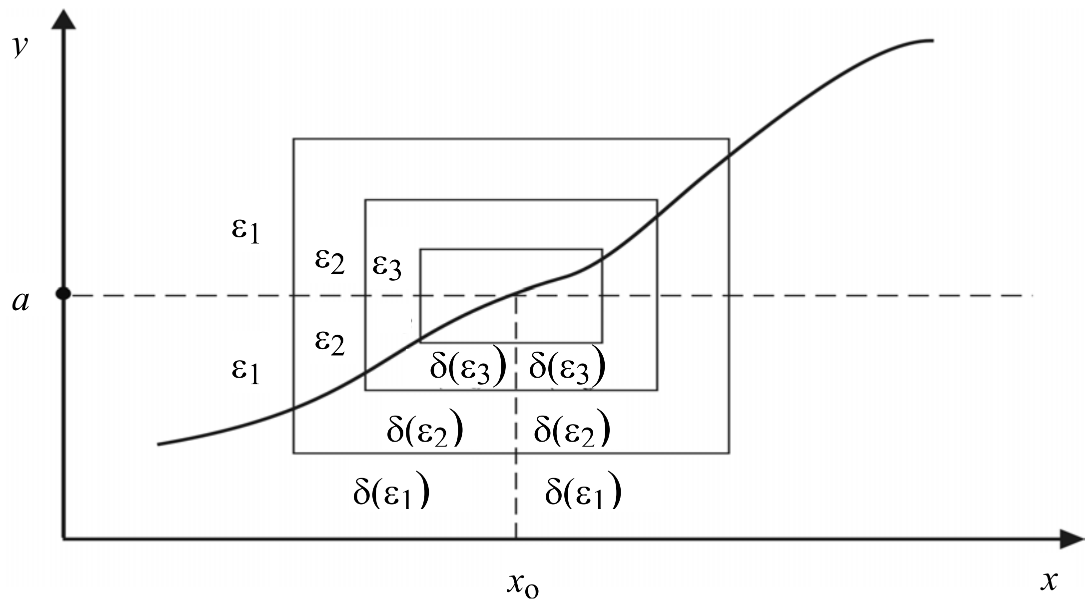


Рис. 1. К определению предела функции в точке.

Если данное определение выполняется, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \to a \text{ при } x \to x_0. \qquad (4)$$

Говоря геометрически, график функции, имеющей предел в точке x_0, вплотную приближается к точке (x_0, a), когда x вплотную приближается к x_0, неважно с какой стороны.

ПРИМЕР 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8$, (найти $\delta(\varepsilon)$).

Для этого надо решить неравенство

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-1/3}-8\right|<\varepsilon$$

относительно переменной x. Упрощая выражение под знаком модуля, получаем

$$5\left|\frac{9x^2-6x+1}{3x-1}\right|<\varepsilon .$$

Разлагая на множители квадратный трехчлен в числителе, имеем

$$\left|\frac{(3x-1)^2}{3x-1}\right|<\frac{\varepsilon}{5} \quad\Leftrightarrow\quad |3x-1|<\frac{\varepsilon}{5} \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}.$$

Следовательно, можно положить $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{15}$.

Существует другое определение предела функции в точке, эквивалентное предыдущему. Оно звучит так:

Если для любой последовательности x_n точек из области определения функции $f(x)$, такой что $x_n \neq x_0$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции имеет один и тот же предел а, то говорят, что $f(x)$ имеет предел а при $x \to x_0$.

Мы не будем приводить доказательство эквивалентности двух данных определений. Заметим, что первое из них называется определением "***на языке** $\varepsilon-\delta$*", второе – определением "***на языке последовательностей***". На практике иногда удобнее пользоваться одним определением, иногда – другим.

Еще одно принципиально важное определение:

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (включая саму эту точку) и

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f(x_0), \tag{5}$$

*то эта функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0.*

Говоря геометрически, при приближении x вплотную к x_0 график непрерывной в x_0 функции $f(x)$ не только приближается вплотную к точке $(x_0, f(x_0))$, но и включает в себя эту точку.

Следующие определения аналогичны соответствующим определениям для числовых последовательностей.

*Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = 0$, то функция $f(x)$ называется **бесконечно малой при** $x \to x_0$.*

*Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при** $x \to x_0$, если $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно мала при $x \to x_0$.* При этом пишут

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = \infty \text{ или } "f(x) \to \infty \text{ при } x \to x_0".$$

Как и в случае последовательностей, можно ввести понятия положительной и отрицательной бесконечно малой или бесконечно большой функции. Основные свойства предела функции в точке также аналогичны свойствам предела числовой последовательности. Перечислим их, не приводя доказательств.

Теорема 1 (о единственности предела). *Функция не может иметь более одного предела в данной точке.*

Теорема 2 (об ограниченности функции, имеющей предел). *Если $f(x) \to a$ при $x \to x_0$, то $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$.*

Теорема 3 (о пределе суммы, произведения и отношения двух функций). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на выколотой δ-окрестности точки x_0, и при этом существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$, тогда:*

$$\exists \lim_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right] = \lim_{x\to x_0} f\left(x\right) + \lim_{x\to x_0} g\left(x\right) \tag{6}$$

$$\exists \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{7}$$

Кроме того, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, *то*

$$\exists \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \tag{8}$$

Теорема 4 (о переходе к пределу в неравенствах). *Если на некотором множестве вида* (2), *т.е. выколотой* δ*-окрестности точки* x_0, $f(x)\le g(x)$, *и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Наоборот, *если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *причём* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)< \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *то на некотором множестве вида* (2) $f(x)<g(x)$.

Теорема 5 (о двух милиционерах). *Если функции* $f(x)$, $h(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условиям:* $f(x)\to a$, $h(x)\to a$ *при* $x\to x_0$ *и* $f(x)\le g(x)\le h(x)$, *то* $g(x)\to a$ *при* $x\to x_0$.

Теорема 6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=c+\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Эта теорема означает, что функция, имеющая предел c в точке x_0, может быть приближенно заменена (***аппроксимирована***) в окрестности этой точки константой c. Абсолютная ошибка аппроксимации стремится к нулю с приближением x к x_0

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $f(x)=c=const:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. При любом $x_0\in\mathbb{R}$ эта функция очевидным образом непрерывна:

$$f(x_n)-f(x_0)=c-c=0\to 0 \text{ при } x_n\to x_0.$$

ПРИМЕР 4. Аналогичный результат получается для функции $f(x)=x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, поскольку

$$f(x_n)=x_n\to x_0=f(x_0) \text{ при } x_n\to x_0.$$

ПРИМЕР 5. Каждая функция $y = x^n$ $(n = 2,3,4,...)$ непрерывна в любой точке числовой прямой в силу теоремы 3. Если использовать также пример 3, приходим к выводу, что и каждый многочлен

$$P_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa x^k$$

непрерывен в любой точке числовой оси. Далее, с помощью свойства (8) убеждаемся, что каждая рациональная дробь, т.е. отношение двух многочленов, непрерывна в любой точке числовой оси, кроме корней знаменателя, где она не определена.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим функции $\sin x$ и $\cos x$. Из их геометрического определения (с помощью тригонометрического круга) очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Следовательно, синус и косинус непрерывны при $x = 0$. Теперь займемся поведением этих функций при $x \to x_0$, где x_0 – произвольное число. Имеем

$$\sin x = \sin\left(x_0 + (x - x_0)\right) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)\,.$$

Если $x_n \to x_0$, то $z_n = x_n - x_0 \to 0,\ \cos z_n \to 1,\ \sin z_n \to 0$. Поэтому $\sin x \to \sin x_0$ при $x \to x_0$ в силу (6), (7). Аналогично получаем $\cos x \to \cos x_0$ при $x \to x_0$.

Иначе говоря, $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в любой точке $\mathbb{R}$. Функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны в своих областях определения по формуле (8).

ПРИМЕР 7. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{\sin x}{x}\,. \tag{9}$$

Она определена при всех x, кроме $x = 0$. Выясним, как она себя ведет при $x \to 0$. Формула (8) в данном случае ничего не дает, ибо и числитель, и знаменатель в (9) бесконечно малы при $x \to 0$ (***неопределенность вида*** $\frac{0}{0}$). Чтобы "раскрыть" неопределенность, рассмотрим рис. 2, где x – дуга BC (или угол BOC) в радианах. Обозначим через S_c площадь сектора OBC. Очевидно,

$$S_{OAB} < S_c < S_{ODC} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x\,.$$

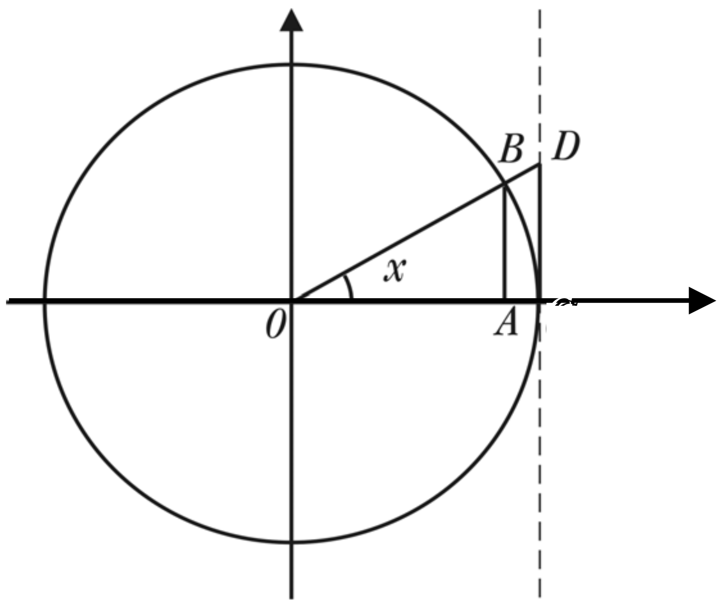


Рис. 2. К примеру 7.

Умножая это неравенство на $\frac{2}{\sin x}$ $(\sin x > 0)$ имеем $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Заметим, что такое же двойное неравенство получается при отрицательных x, точнее, при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, что легко проверить. Так как $\cos x \to 1$, $\frac{1}{\cos x} \to 1$, то в силу теоремы 5 получаем, что и $\frac{x}{\sin x} \to 1$ при $x \to 0$. Итак,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{10}$$

Это утверждение называют часто ***первым замечательным пределом*** из-за его важных применений, с которыми мы еще познакомимся.

Вернемся к общей теории. Если до сих пор, в настоящем разделе, мы выясняли, как может себя вести функция $f(x)$ при приближении x к x_0 *с любой стороны*, то теперь предположим, что такое приближение может осуществляться только с *одной стороны*. При этом, аналогично предыдущему, возникают понятия односторонней ограниченности и односторонних пределов функции.

Итак, пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором открытом интервале с правым концом x_0.

Говорят, что $f(x)$ ***ограничена при*** $x \to x_0 - 0$ (***при*** x, ***стремящемся к*** x_0 ***слева***)*, если она ограничена на некотором множестве вида*

$$(x_0 - \delta, x_0), \quad \delta > 0 \tag{11}$$

Аналогично определяется *ограниченность* $f(x)$ ***сверху*** или ***снизу при*** $x \to x_0 - 0$.

Число а называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** x ***, стремящемся к*** x_0 ***слева****, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что при* $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$ *выполняется соотношение* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если это определение выполняется, то пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a, \text{ или } f(x) \to a \text{ при } x \to x_0 - 0.$$

Само значение предела *a* можно обозначать символом $f(x_0 - 0)$.

Читатель легко запишет эквивалентное определение на языке последовательностей.

Если, вдобавок, функция $f(x)$ *определена в точке* x_0, *и*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \tag{12}$$

то $f(x)$ *называется* ***непрерывной слева в точке*** x_0.

Совершенно аналогично определяются ограниченность, наличие предела, непрерывность при *x*, ***стремящемся к*** x_0 ***справа***. Надо лишь заменить множество (11) множеством

$$(x_0, x_0 + \delta), \quad \delta > 0, \tag{13}$$

символы $x \to x_0 - 0$; $f(x_0 - 0)$ – символами $x \to x_0 + 0$; $f(x_0 + 0)$, слово "слева" – на слово "справа".

Понятие одностороннего предела функции в точке (т.е. предела слева или предела справа) обладает многими свойствами, аналогичными свойствам предела функции в точке. Теоремы 1 – 6 можно переформулировать для каждого из односторонних пределов функции.

Добавим только следующее свойство, связывающее три введенные выше вида предела функции:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \left\{ \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x), \lim_{x\to x_0+0} f(x), \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \right\}$$

причем

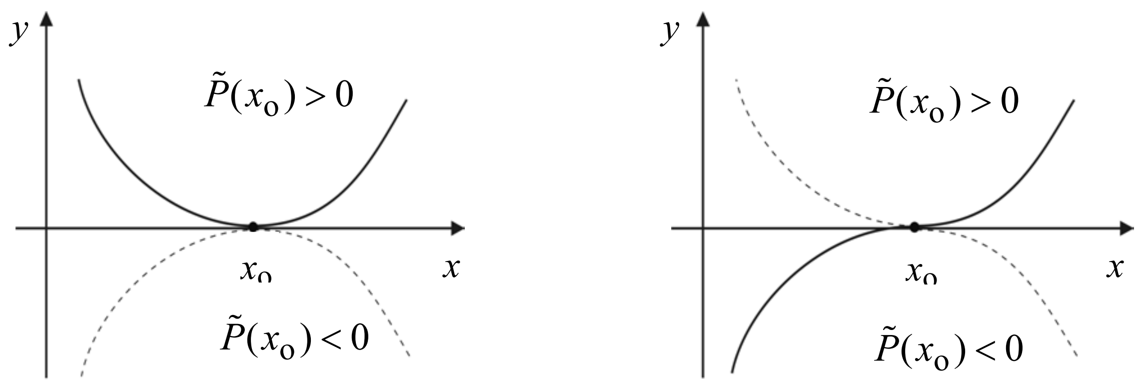
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

ПРИМЕР 8. Рассмотрим многочлен $P(x)$, имеющий точку x_0 своим корнем кратности *k*, так что

$$P(x) = (x - x_0)^k \tilde{P}(x),$$

где $\tilde{P}(x)$ – многочлен, $\tilde{P}(x_0) \neq 0$.

Ясно, что $P(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Если *k* четно, то это бесконечно малая того же знака, что и $\tilde{P}(x_0)$. Если *k* нечетно, то $P(x)$ – бесконечно малая того же знака, что и $\tilde{P}(x_0)$ при $x \to x_0 + 0$ и противоположного знака при $x \to x_0 - 0$ (рис. 3).



(а) *k* – четное (б) *k* – нечетное

Рис. 3. К примеру 8.

ПРИМЕР 9. Пусть $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная дробь, т.е. $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Предположим, что x_0 – корень кратности *k* многочлена

$Q(x)$, т.е. $Q(x)=(x-x_0)^k \tilde{Q}(x)$, $\tilde{Q}(x_0)\neq 0$. При этом есть следующие возможности:

а) $P(x_0)\neq 0$. Тогда $f(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$. Её поведение в окрестности x_0 зависит от четности k и знака $P(x_0)/Q(x_0)$. Возможные варианты представлены на рис. 4.

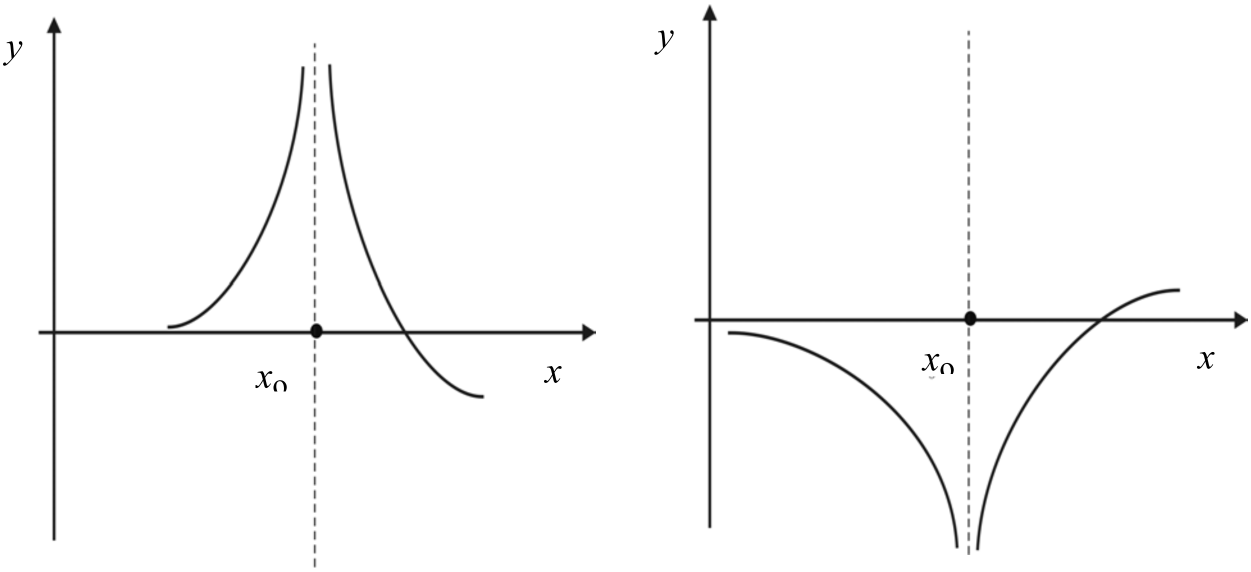


Рис. 4. К примеру 9а.

б) x_0 – корень $P(x)$ кратности l, т.е. $P(x)=(x-x_0)^l \tilde{P}(x)$, $\tilde{P}(x_0)\neq 0$, причем $l<k$. Тогда

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^l \tilde{P}(x)}{(x-x_0)^k \tilde{Q}(x)}=\frac{\tilde{P}(x)}{(x-x_0)^{k-l} \tilde{Q}(x)},$$

и мы возвращаемся к (а).

в) То же, что и выше, но $l>k$. Тогда

$$f(x)=(x-x_0)^{l-k}\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

и поведение функции $f(x)$ вблизи $x=x_0$ такое же, как у многочлена в примере 8.

г) То же, что и выше, но $l=k$. Тогда

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^k \tilde{P}(x)}{(x-x_0)^k \tilde{Q}(x)}=\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},\quad (x\neq x_0).$$

Это новая ситуация. Существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{\tilde{P}(x_0)}{\tilde{Q}(x_0)}$, но он не равен $f(x_0)$, т.к. $f(x)$ не определена при $x = x_0$ (рис. 5). Функция $f(x)$ не непрерывна (***разрывна***) при $x = x_0$.

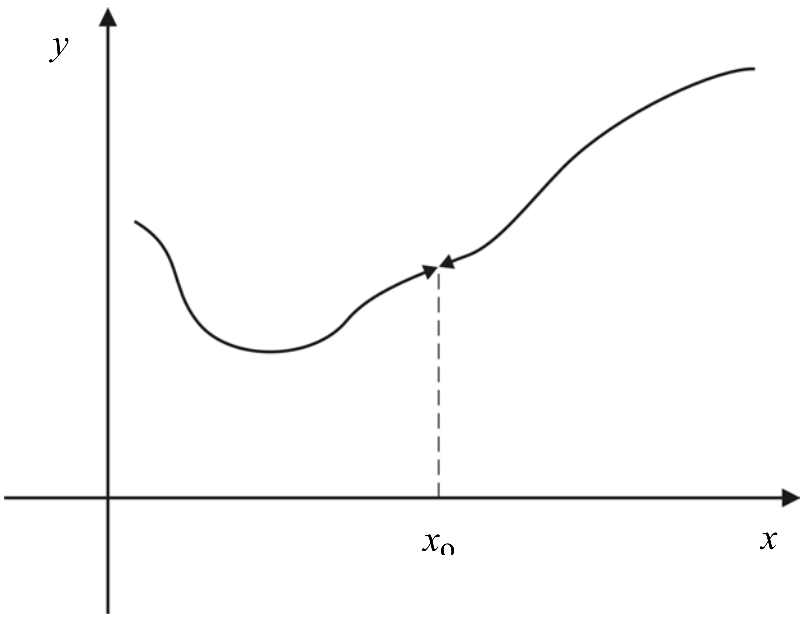


Рис. 5. К примеру 9г.

Будем теперь изучать поведение функции не вблизи некоторой точки $x=x_0$, а при неограниченно растущем или, наоборот, неограниченно убывающем x. В том же порядке идей, что для окрестности точки, получаются определения асимптотических свойств функции ***при*** *x,* ***стремящемся к плюс бесконечности****, или* ***к минус бесконечности****, или просто* ***к бесконечности.***

Говорят, что $f(x)$ ***ограничена при*** $x \to +\infty$*, если она ограничена на некотором множестве вида*

$$(c, +\infty), \tag{14}$$

где c – фиксированная константа. Аналогично определяется ***ограниченность*** $f(x)$ ***сверху или снизу при*** $x \to +\infty$.

Число a называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** *x,* ***стремящемся к плюс бесконечности****, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $M(\varepsilon)$*, что при* $x > M(\varepsilon)$ *выполняется соотношение* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если это соотношение выполняется, то пишут

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c \text{ или } "f(x)\to c \text{ при } x\to+\infty".$$

Аналогично определяются понятия ограниченности функции при $x\to-\infty$ и её предела при $x\to-\infty$.

Наконец, *если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *и они равны между собой, то их общее значение называют* ***пределом*** $f(x)$ ***при*** *x,* ***стремящемся к бесконечности*** (без знака) и обозначают символом $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ обладают многими свойствами, аналогичными свойствам предела функции в точке. Теоремы 1 – 6 можно переформулировать для каждого из этих видов предела.

ПРИМЕР 10.

а) Функция $y=c=const:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ограничена при $x\to\infty$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x=c$.

б) Функция $y=x^n$ $(n=1,2,3,...)$ бесконечно велика при $x\to\infty$;

$x^n\to+\infty$ при $x\to+\infty$;

$x^n\to+\infty$ или $x^n\to-\infty$ при $x\to-\infty$ в зависимости от того, четно или нечетно *n*.

в) Многочлен

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

может быть приведен к виду

$$P_n(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+...+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right) \tag{15}$$

при $x\neq 0$. Все слагаемые в скобках, кроме единицы, бесконечно малы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Поэтому $P_n(x)$ есть бесконечно большая в каждом из этих направлений. Знак этой бесконечно большой зависит от знака a_n и четности *n*.

Представление многочлена в форме (15) при больших $|x|$ позволяет исследовать поведение при $x\to\pm\infty$ рациональной дроби. Для этого надо применить (15) отдельно к числителю и знаменателю дроби.

1.3. Свойства непрерывных функций

Что такое функция, непрерывная в некоторой точке своей области определения, мы узнали в предыдущем разделе.

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Мы знаем, что непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что

$$f\left(x\right) = f(x_0) + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0,$$

т.е. что $f(x)$ аппроксимируется в окрестности точки x_0 числом $f(x_0)$ с абсолютной ошибкой, стремящейся к нулю при $x \to x_0$.

Теорема 1 (о непрерывности суммы, произведения и отношения).
Сумма и произведение двух непрерывных в некоторой точке функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в этой точке. Если, к тому же, $g(x) \neq 0$ в указанной точке, то и отношение $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ – непрерывная в этой точке функция.

Доказательство этой теоремы немедленно вытекает из аналогичной теоремы для пределов при $x \to x_0$.

Следствие. *Свойство непрерывности в данной точке или на данном множестве* ***линейно****: если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, и α, β – числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g\left(x\right)$ также непрерывна.*

Теорема 2 (о непрерывности сложной функции).
Пусть даны функции $y = f(x) : X \to Y$, $z = g(y) : Y \to Z$, где $X, Y, Z \in \mathbb{R}$. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g\left(f(x)\right) : X \to Z$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть x_n – последовательность точек из X, сходящаяся к x_0. В силу непрерывности $f(x)$ в x_0 имеем $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty, f(x_n) \in Y$. В силу непрерывности $g(y)$ в $y_0 = f(x_0)$ имеем $h(x_n) = g\left(f(x_n)\right) \to g\left(f(x_0)\right) = h(x_0)$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

Напомним определения, известные, вообще-то, из школьного курса.

Функция $f(x)$ *называется* ***возрастающей на множестве*** *X, если из*

$$x_1, x_2 \in X; \;\; x_1 < x_2 \qquad (1)$$

следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. *Если из* (1) *следует, что* $f(x_1) > f(x_2)$, *то функция* $f(x)$ *называется* ***убывающей*** *на X. В обоих случаях говорят, что функция* $f(x)$ ***строго монотонна*** *на X.*

Если условия (1) *обеспечивают лишь неравенство* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *или неравенство* $f(x_1) \geq f(x_2)$, *то функция* $f(x)$ *называется, соответственно,* ***неубывающей*** *или* ***невозрастающей***. *В обоих случаях говорят, что она* ***монотонна*** *на множестве X.*

Теорема 3 (о функции, обратной к строго монотонной).

Пусть функция $y = y(x)$, *заданная на некотором интервале* $[a,b]$, *возрастает на нем и непрерывна во всех его точках. Тогда существует обратная ей функция* $x = x(y)$, *определенная, возрастающая и непрерывная на интервале* $[y(a), y(b)]$. *Утверждение остаётся в силе, если слова “возрастает”, “возрастающая” заменить на “убывает”, “убывающая”.*

Мы не будем приводить строгого доказательства этой теоремы. Ограничимся ее геометрической очевидностью (рис. 1, для случая возрастания).

Непрерывная кривая на рисунке – это график функции $y = y(x)$, непрерывной и возрастающей на $[a,b]$. Но она же является графиком обратной функции $x = x(y)$, если считать y – независимой, а x – зависимой переменными. Видно, что заключения теоремы выполняются.

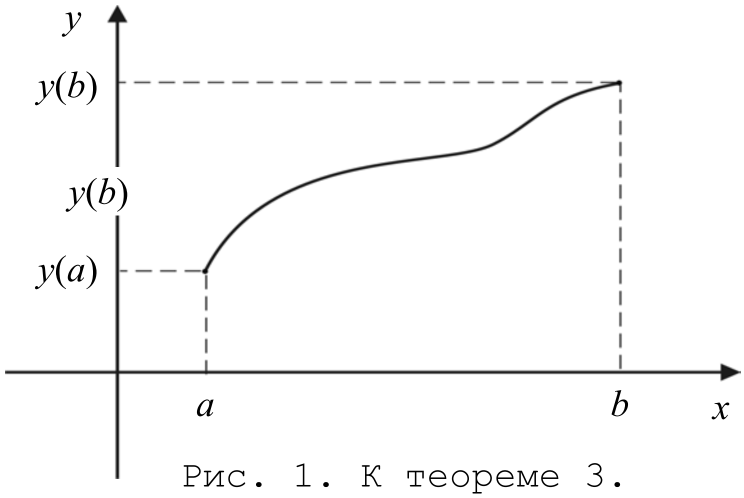


Рис. 1. К теореме 3.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ***общую степенную функцию***

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \text{константа}, \quad x > 0). \qquad (2)$$

Выше мы доказали ее непрерывность только при $\alpha = n \in \mathbb{N}$, даже на всей числовой оси (пример 4 из 1.2). Пусть теперь $y = x^{1/n}$, $(n \in \mathbb{N})$. Эта функция обратна по отношению к возрастающей непрерывной функции $x = y^n$ на любом замкнутом интервале положительной полуоси, поэтому и сама возрастает и непрерывна на аналогичных интервалах в силу теоремы 3. Тем самым она непрерывна при любом $x > 0$.

Пусть, $\alpha = \dfrac{m}{n}$, $(m, n \in \mathbb{N})$. Тогда функция (2) имеет вид $y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{1/n}\right)^m$ и по теореме 2 оказывается непрерывной как сложная функция.

Если $\alpha = -\dfrac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ и $x > 0$, то функция $y = x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{m/n}}$ непрерывна на своей области определения как отношение непрерывных функций. Конечно, это убывающая функция.

Таким образом, функция (2) непрерывна в своей области определения при любом рациональном α. Если же α иррационально, то эта функция, строго говоря, ещё не определена, т.е. неясно, что значит возвести число в иррациональную степень. Её определением мы, прежде всего, и займёмся.

Итак, пусть $\alpha > 0$ иррационально, и α_k – последовательность его десятичных приближений с недостатком. Положим сначала $x > 1$. Последовательность x^{α_κ} не убывает и ограничена сверху, например, числом $x^{\alpha_1 + 1}$. Поэтому, в силу признака Вейерштрасса, существует предел этой последовательности, который мы и называем значением x^{α}.

Если $0 < x < 1$, то определение не меняется, просто последовательность x^{α_κ} не возрастает и ограничена снизу.

При $\alpha < 0$ рассуждения аналогичны.

Наконец $1^{\alpha} = 1^{\alpha_\kappa} = 1$.

Итак, для $x > 0$ и иррационального α существует число

$$x^{\alpha} = \lim_{\kappa \to \infty} x^{\alpha_\kappa}, \qquad (3)$$

где $\alpha_к$ – десятичные приближения числа α.
Отметим, что формула (3) пригодна не только для иррациональных, но и для рациональных α.

Теперь легко доказать непрерывность функции (2) для иррационального α. Пусть $[\alpha]$ - целая часть числа α, т.е. максимальное целое число, не превосходящее α. Сначала обоснуем непрерывность (2) при $x = 1$ и $\alpha > 0$. Пуста Δx – малое отклонение x от единицы. Имеем

$$(1+\Delta x)^{[\alpha]} \le (1+\Delta x)^{\alpha} \le (1+\Delta x)^{[\alpha]+1} \quad (\Delta x > 0)$$

$$(1+\Delta x)^{[\alpha]+1} \le (1+\Delta x)^{\alpha} \le (1+\Delta x)^{[\alpha]} \quad (\Delta x < 0).$$

В силу непрерывности степенной функции с целым показателем и теоремы о полицейских, при переходе к пределу при $\Delta x \to 0$ получим $(1+\Delta x)^{\alpha} \to 1$, что и требовалось.
Если $x \ne 1$, то

$$(x+\Delta x)^{\alpha} = x^{\alpha}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} \to x^{\alpha} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

В случае $\alpha < 0$ воспользуемся равенством $x^{\alpha} = 1/x^{-\alpha}$. Таким образом, любая степенная функция (2) непрерывна в своей области определения.
Заметим, что, используя этот факт и формулу (3) , легко распространить правила действий над степенями с рациональными показателями на случаи иррациональных показателей. Но мы не будем на этом останавливаться.

ПРИМЕР 2. Перейдём к показательной функции

$$y = a^x \quad (a > 0, \quad a \ne 1) \tag{4}$$

С её определением сложностей нет, т.к. мы уже умеем возводить любое положительное число в любую действительную степень.
Покажем, что функция (4) непрерывна при каждом x. Пусть $x_n \to x$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся десятичное приближение $\tilde{x}_к$ числа x такое, что $\left|a^{\tilde{x}_к} - a^x\right| < \varepsilon$ в силу (3). С другой стороны, найдётся n_0 такое, что при $n \ge n_0$ будет $|x_n - x| < |\tilde{x}_к - x|$ а значит $\left|a^{x_n} - a^x\right| < \varepsilon$, что и требуется.

ПРИМЕР 3. Вместе с показательными непрерывны и все логарифмические функции $y = \log_a x$ как обратные к показательным.

ПРИМЕР 4. Обратные тригонометрические функции непрерывны как обратные к непрерывным.

Учитывая разобранные выше примеры, можно заключить, что *любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.*

ПРИМЕР 5. Рассмотрим функцию $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, заданную на множестве $\{x > 0\} \cup \{x < -1\}$, и исследуем её поведение при $x \to \infty$. Пусть, сначала, $x \to +\infty$. Введём целую часть $[x]$ числа x. Можно записать

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]}\right).$$

С другой стороны

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x \ge \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}.$$

Таким образом, если имеется последовательность $x_n \to +\infty$, то

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)$$

Поскольку последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, возрастая, стремится к числу e, то и

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \to e, \quad \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \to e.$$

Кроме того, очевидно, что

$$1+\frac{1}{[x_n]} \to 1, \qquad \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} \to 1.$$

Поэтому с помощью теоремы о двух милиционерах получаем $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ при $x \to +\infty$. Пусть теперь $x \to -\infty$. Сделаем замену переменной, введя $y=-x-1$. Тогда $y \to +\infty$, и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right) \to e \cdot 1 = e .$$

Окончательно, получаем так называемый "***второй замечательный предел***":

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \qquad (5)$$

ПРИМЕР 6. Если в формуле (5) сделать замену $t=\frac{1}{x}$, а затем переобозначить переменную t на x, получим еще один часто используемый вид записи второго замечательного предела:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e} \qquad (6)$$

ПРИМЕР 7 (экспонента и гиперболические функции). Среди показательных функций $y=a^x$ в приложениях особенно часто используется функция

$$y=e^x . \qquad (7)$$

Её иногда обозначают также $y=\exp x$ и называют ***экспонентой*** $y=a^x=e^{x\ln a}$, или ***экспоненциальной функцией.*** Любая показательная функция выражается через экспоненту следующим очевидным образом:

$$y=a^x=e^{x\ln a} . \qquad (8)$$

Следовательно, график функции (8) получается из графика экспоненты сжатием в $|\ln a|$ раз к оси y и, если $0<a<1$, ещё и отражением в этой оси.

У экспоненты есть несколько близких родственников, называемых ***гиперболическими функциями***. Они определяются так:

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) \qquad \text{– гиперболический синус,} \qquad (9)$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) \qquad \text{– гиперболический косинус,} \qquad (10)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \text{– гиперболический тангенс,} \tag{11}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \qquad \text{– гиперболический котангенс.} \tag{12}$$

Почему у этих функций названия, сходные с названиями тригонометрических функций, и причём здесь слово “гиперболический”? Постепенно мы ответим на эти вопросы.

Поскольку гиперболические функции весьма полезны при решении многих прикладных задач, желательно познакомиться с ними поближе.

Во-первых, отметим, что все они определены на всей числовой оси. За исключением $\operatorname{cth} x$, который не существует при $x = 0$.

Во вторых, как легко убедиться, $\operatorname{sh} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$ – функции нечётные, тогда как $\operatorname{ch} x$ – чётная функция:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x \tag{13}$$

(уже начинает просматриваться аналогия с тригонометрическими функциями).

В-третьих, для гиперболических функций имеет место целый ряд тождеств, в известном смысле также аналогичных тригонометрическим тождествам. Выпишем основные из них:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{14}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \tag{15}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \tag{16}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \tag{17}$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \tag{18}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y, \tag{19}$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right], \tag{20}$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right], \tag{21}$$

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right]. \tag{22}$$

Эти формулы легко вытекают из определений (9) – (12). Докажем, например, формулу (20):

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) + \left(e^{x-y} - e^{-(x-y)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{x-y} - e^{-(x-y)}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right].$$

Формулы (21), (22) доказываются аналогично. Складывая или вычитая (20) и такую же формулу с переменой мест x и y, получаем (18). Складывая или вычитая (21) и (22), получаем (19).Полагая в (18) (со знаком +) $y = x$, имеем формулу (15). Полагая $y = x$ в (19), имеем (14) и формулу (16). Наконец, (17) получается, как в тригонометрии, делением формулы (15) на (16).

Графики гиперболических функций имеют вид, изображённый на рис. 2. Ясно, что функции (9) – (12) непрерывны во всех точках своих областей определения.

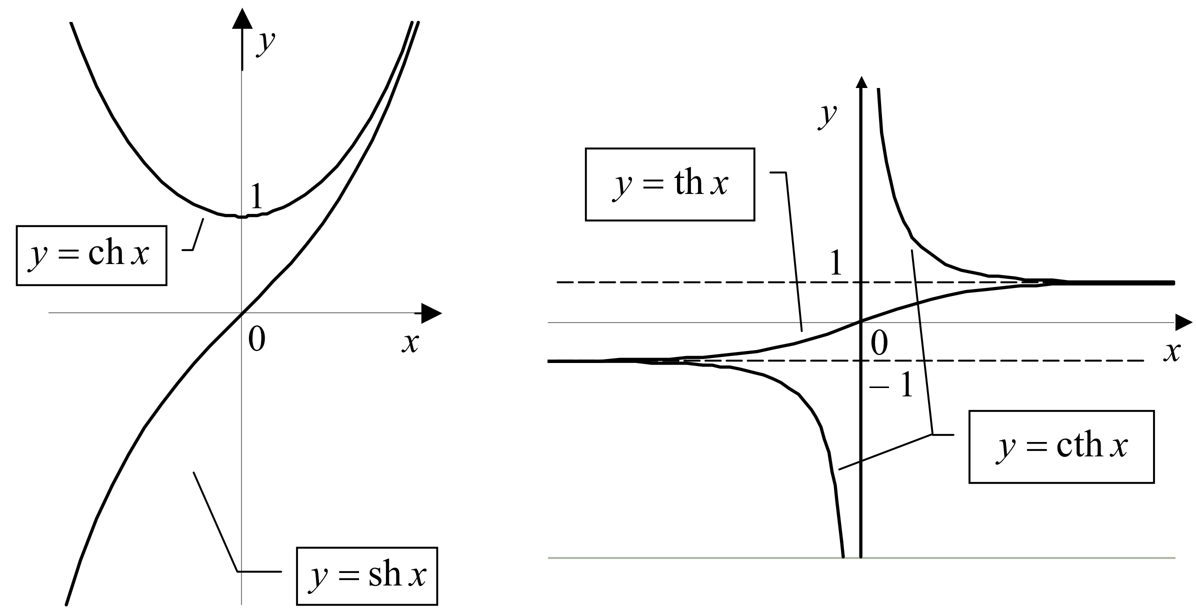


Рис. 2. Графики гиперболических функций.

Закончив с примерами, вернемся к теории.

Говорят, что функция $f(x)$ *имеет* ***изолированную точку разрыва*** *при* $x = x_0$, *если она непрерывна на некотором множестве вида* $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ *и не является непрерывной при* $x = x_0$.

Принята следующая классификация точек разрыва:

I. *Если существуют односторонние пределы* $f(x_0-0)$ *и* $f(x_0+0)$, *то* x_0 *называется* ***точкой разрыва первого рода***, *или* ***точкой скачка*** *функции* $f(x)$. *Число* $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ *называется* **скачком** $f(x)$ *в точке* x_0 .

В точке скачка разрыв может происходить по одной из двух причин:

а) $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ (скачок не равен нулю), поэтому не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Это случай ***неустранимого разрыва первого рода***, или ***ненулевого скачка***.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим функцию $y=|x|$ (рис. 3) и введём функцию $y=f(x)$, где $f(x)$ = тангенсу угла наклона графика $y=|x|$ к оси x. Очевидно, $f(x)$ определена при $x\neq 0$ и имеет график, изображённый на рис 4. Ясно, что $x=0$ является точкой скачка этой функции, причем скачок равен 2.

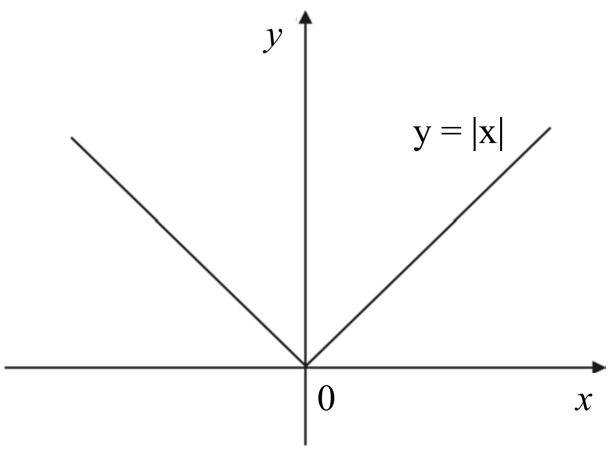


Рис.3.

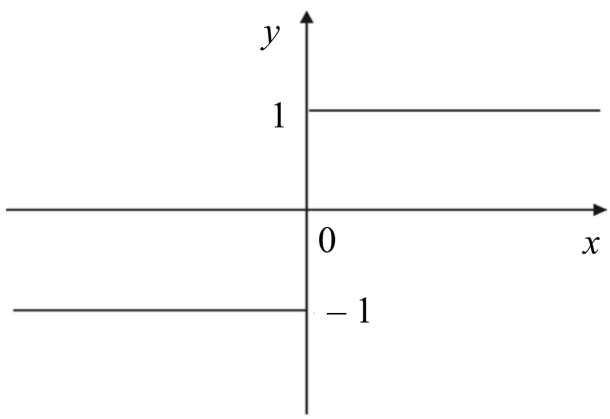


Рис.4.

К примеру 8.

б) $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ (скачок равен нулю), а значит существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Но этот предел не совпадает с $f(x_0)$, или $f(x_0)$ просто не существует. Здесь мы имеем дело с ***устранимым разрывом первого рода***: достаточно соответствующим образом изменить значение функции $f(x)$ в единственной точке $x = x_0$ (или придать ей в этой точке нужное значение, если его не было), чтобы получилась функция, непрерывная при $x = x_0$.

ПРИМЕР 9. Точка $x = 0$ для функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Аналогичный разрыв имеет функция $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ в точке $x = 2$, как читатель легко проверит.

II. Если не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $f(x)$.

Если, к тому же, $f(x)$ неограничена при $x \to x_0$, то говорят, что x_0 есть точка ***бесконечного разрыва*** функции $f(x)$. При этом прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $f(x)$.

ПРИМЕР 10. Функции, изображённые на рис.4 из 1.2 имеют вертикальные асимптоты. То же можно сказать о функциях $y = \operatorname{tg} x$ (в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$), $y = \operatorname{ctg} x$ (при $x = \pi n$) и $y = \operatorname{cth} x$ (при $x = 0$). Функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$ имеет при $x = 0$ разрыв второго рода (но не бесконечный). Проверьте!

Очень много применений имеет следующая теорема о непрерывных функциях.

Теорема 4 (о функции, непрерывной на замкнутом интервале). *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на замкнутом интервале* $[a,b]$. *Тогда:*

а) $f(x)$ *ограничена на* $[a,b]$ *и достигает на этом интервале своих наибольшего и наименьшего значений:*

$$\exists \xi \in [a,b]:\ \forall x \in [a,b]\ \ f(\xi) \ge f(x),$$

$$\exists \eta \in [a,b]:\ \forall x \in [a,b]\ \ f(\eta) \le f(x).$$

б) $f(x)$ принимает на $[a,b]$ любое значение, промежуточное между наибольшим и наименьшим:

$$\{f(\eta) \le c \le f(\xi)\} \Rightarrow \{\exists x \in [a,b]:\ f(x) = c\}.$$

Мы не будем приводить строгого доказательства этой теоремы. Ограничимся геометрическими пояснениями.

По условию теоремы, график функции $y = f(x)$ есть непрерывная кривая, соединяющая точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис.5).

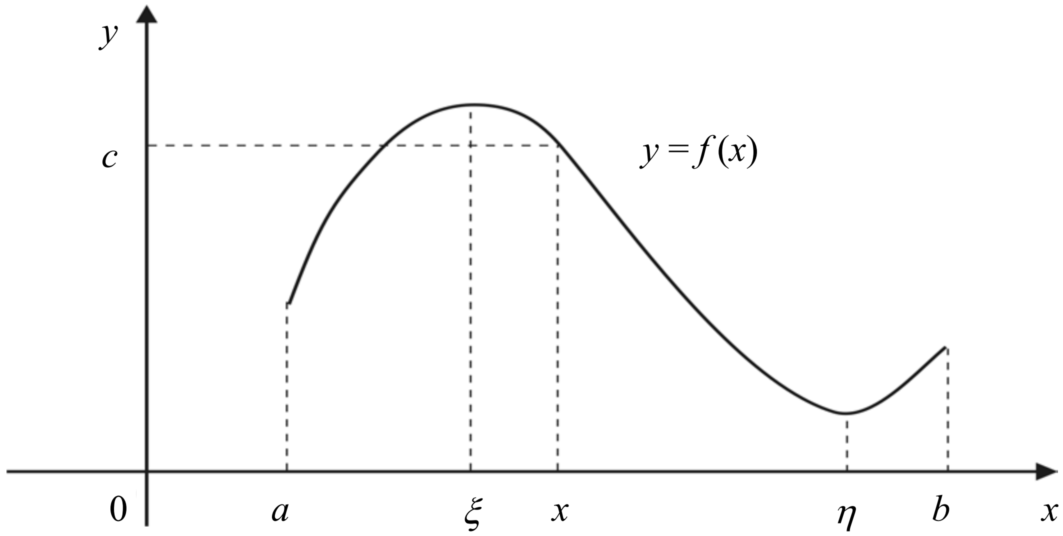


Рис. 5. К теореме 4.

Она не может уйти как угодно далеко вверх, ибо ей надо вернуться в конечную точку, не разорвавшись. Значит, где-то (при $x = \xi$) она должна иметь максимальное значение. Аналогично с минимумом. С промежуточным значением также все ясно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждое из условий теоремы – замкнутость интервала $[a,b]$ и непрерывность функции $f(x)$ на нём – существенны для её справедливости. Убедимся в этом на следующих трех примерах, где полезно нарисовать графики рассматриваемых функций.

ПРИМЕР 11. $y = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$. Функция определена на интервале $[0,1]$ и разрывна в точке $x = 0$. Она неограничена.

ПРИМЕР 12. Функция $y = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{при} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$ задана на интервале $[0,2]$, имеет разрыв при $x = 1$. Она не принимает значений $0 < y < 1$, промежуточных между наименьшим и наибольшим.

ПРИМЕР 13. Функция $y = x$ на $(0,1)$ хоть и непрерывна, но не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений на своей области определения.

Утверждение **б)** теоремы 4 лежит в основе приближённого ***метода вилки*** решения уравнений вида $f(x)=0$. Для применения этого метода требуется иметь интервал $[a,b]$ оси *x* такой, что:

1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) она принимает в точках a и b значения противоположных знаков;
3) она имеет внутри интервала $[a,b]$ только один корень x_0.

Если эти условия выполнены, то для приближённого вычисления корня x_0 поступают так: вычисляют $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, т.е. значение функции *f* в середине интервала $[a,b]$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то $x_0=\frac{a+b}{2}$. В противном случае x_0 принадлежит той половине отрезка $[a,b]$, на концах которой f имеет значения противоположных знаков. Таким образом интервал возможных положений корня x_0 укоротился вдвое. К этому новому интервалу применяют ту же процедуру деления пополам, что и выше к отрезку $[a,b]$. Эту процедуру перехода от отрезка к его половине повторяют (***итерируют***) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность определения корня x_0.

Процесс нахождения исходного отрезка $[a,b]$*, удовлетворяющего условиям* 1), 2), 3), *называют* ***уединением корня***. Его часто можно выполнить, нарисовав эскиз графика функции $f(x)$.

1.4. Асимптотическое сравнение функций

Часто приходится сравнивать поведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$. Это делают, например, с целью заменить вблизи точки x_0 одну из функций другой, более удобной для анализа или вычисления, сделав при этом допустимо малую ошибку. Рассмотрим основные понятия, связанные с таким ***асимптотическим сравнением функций***.

Функция $f(x)$ *называется* ***ограниченной по сравнению*** *с* $g(x)$, *если отношение* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *ограничено при* $x \to x_0$.

При этом каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ в отдельности вовсе не обязана быть ограниченной при $x \to x_0$.

Факт ограниченности $f(x)$ по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$ записывают в виде

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0,$$

читается "O большое от $g(x)$". Исходя из сказанного выше, эту запись можно расшифровать так: найдутся множество вида $\left(x_0 - \delta, x_0\right) \bigcup \left(x_0, x_0 + \delta\right)$ и число M такие, что на этом множестве выполняется неравенство $\left|f(x)\right| \le M \left|g(x)\right|$.

ПРИМЕР 1. $x^m = O\left(x^n\right)$ при $x \to 0$, если $m \ge n$.

Говорят, что $f(x)$ *и* $g(x)$ *- функции* ***одного порядка*** *при* $x \to x_0$, *если* $f(x) = O\big(g(x)\big)$, $g(x) = O\big(f(x)\big)$ *при* $x \to x_0$. Другими словами, это означает, что *есть такие положительные числа m и M, что* $m \le \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \le M$ *при* $x \to x_0$.

Говорят, что $f(x)$ *и* $g(x)$ *- функции* ***одного порядка*** *при* $x \to x_0$, *если* $f(x) = O\big(g(x)\big)$, $g(x) = O\big(f(x)\big)$ *при* $x \to x_0$. Другими словами, это означает, что *есть такие положительные числа m и M, что* $m \le \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \le M$ *при* $x \to x_0$.

Частный случай этой ситуации получается, когда $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to c \ne 0$ при $x \to x_0$. В самом деле, при этом $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено при $x \to x_0$ так же, как и отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$, которое сходится к $\dfrac{1}{c}$.

Еще более частный случай: *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***асимптотически эквивалентными*** *при* $x \to x_0$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

В этом случае пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

ПРИМЕР 2. Так как $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$, то

$$\sin x \sim x \qquad \text{при} \quad x \to 0. \tag{1}$$

ПРИМЕР 3. Поскольку $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, то

$$\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2/2} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right)^2 \to 1 \text{ при } x \to 0.$$

Поэтому

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \to 0. \tag{2}$$

ПРИМЕР 4. Исходя из соотношения $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ при $x \to 0$ и используя непрерывность логарифмической функции, получаем $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln e$ или $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) \to 1$. Таким образом

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{3}$$

ПРИМЕР 5. Запишем (3) в других обозначениях:

$$\frac{\ln(1+y)}{y} \to 1 \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

и введем новую переменную $x = \ln(1+y)$, т.е. $y = e^x - 1$. Если $x \to 0$, то и $y \to 0$, и мы имеем $\dfrac{x}{e^x - 1} \to 1$. Итак

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{4}$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим отношение $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x}$, где α – фиксированное число и $x \to 0$. Введем переменную $y = \alpha \ln(1+x) \to 0$.

Отношение примет вид

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\frac{e^{y}-1}{\alpha(e^{y/\alpha}-1)}=\frac{e^{y}-1}{y}\cdot\frac{y/\alpha}{e^{y/\alpha}-1}\to 1.$$

Итак:

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x \quad \text{при} \quad x\to 0. \tag{5}$$

Асимптотическую эквивалентность удобно применять при вычислении пределов отношений или произведений: каждый член отношения или произведения можно заменить эквивалентной ему функцией, отчего искомый предел не изменится.

Функция $f(x)$ *называется* ***бесконечно малой по сравнению с*** $g(x)$ *при* $x\to x_0$, *если* $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 0$ *при* $x\to x_0$. Этот факт записывают в виде

$$f(x)=o\big(g(x)\big) \quad (x\to x_0) \tag{6}$$

(читается "o маленькое от $g(x)$". Из (6) не следует, конечно, что $f(x)$ бесконечно мало при $x\to x_0$.

ПРИМЕР 7.

а) Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ можно записать в виде

$$f(x)=c+o(1) \quad (x\to x_0).$$

б) Вместо $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ можно писать

$$f(x)=g(x)\big[1+o(1)\big] \quad (x\to x_0) \tag{7}$$

или

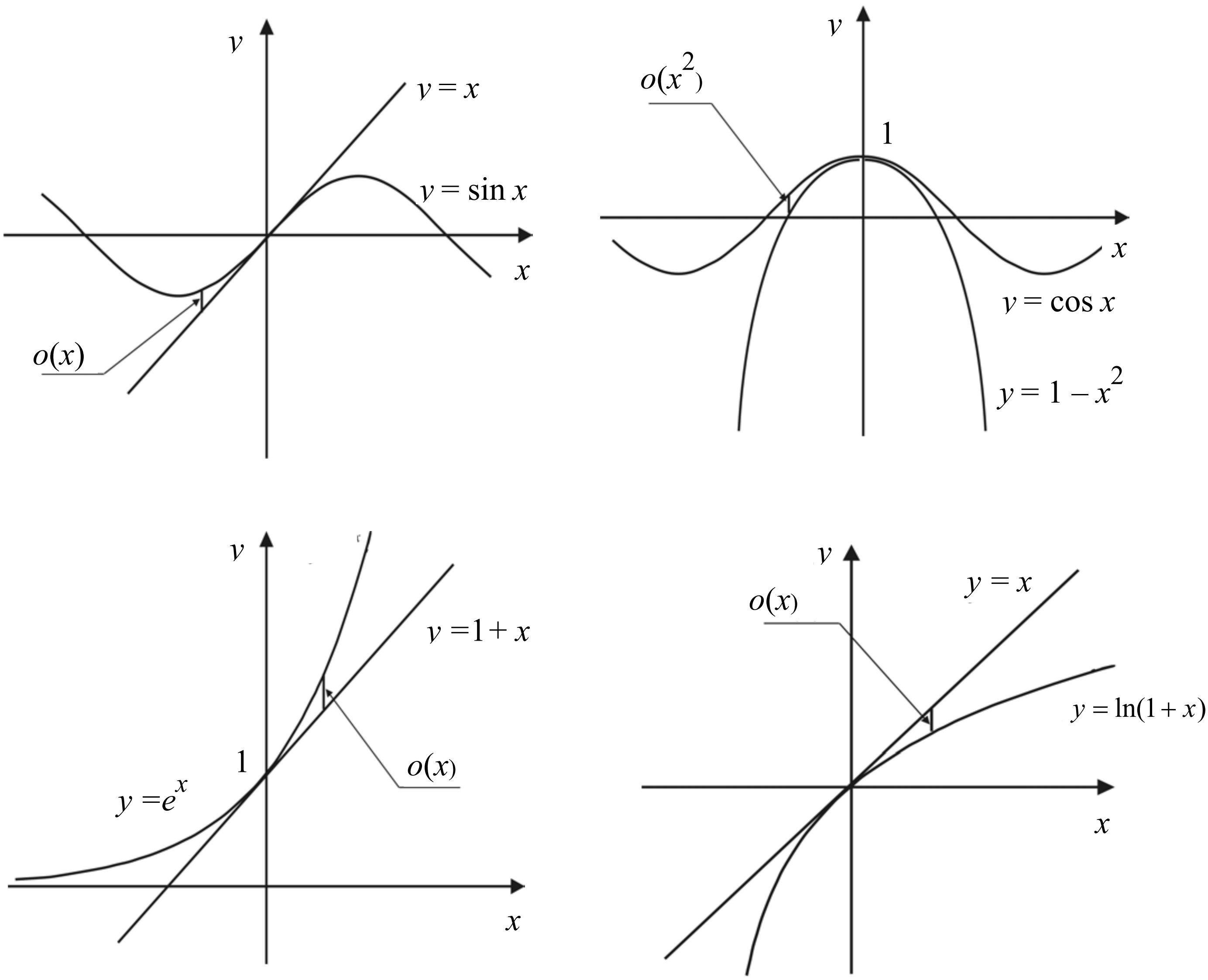
$$f(x)=g(x)+o\big(g(x)\big) \quad (x\to x_0) \tag{8}$$

Это значит, что $f(x)$ аппроксимируется при $x\to x_0$ функцией $g(x)$ с бесконечно малой при $x\to x_0$ ***относительной ошибкой***. Поэтому $g(x)$ *в формуле (7) называют* ***главным членом асимптотики*** $f(x)$ *при* $x\to x_0$. Конечно, $f(x)$ и $g(x)$ в этой формуле можно поменять местами. Обычно стараются использовать формулы типа (7), (8) , аппроксимируя функцию $f(x)$ более простой функцией $g(x)$.

Так, формулы (1) – (5) переписываются в виде (всё при $x \to 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin x = x + o(x), \\ &\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ &\ln(1+x) = x + o(x), \\ &e^x = 1 + x + o(x), \\ &(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \end{aligned}} \qquad (9)$$

Геометрические иллюстрации соотношений (9) даны на рис. 1.



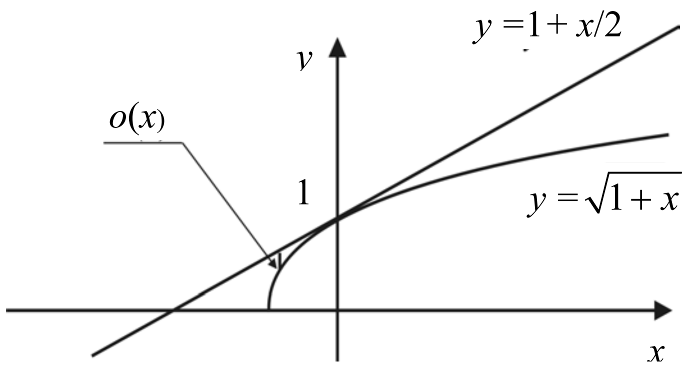


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация соотношений (9).

Всё сказанное выше в этом разделе (кроме примеров) можно повторить применительно к любому из направлений $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$.

ПРИМЕР 8. Пусть дан многочлен степени n.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Если $a_0 \neq 0$, то $P(x) = a_0 \left[1 + o(1)\right]$ при $x \to 0$. Если x_0 – корень $P(x)$ кратности k, то $P(x) = C(x - x_0)^k \left[1 + o(1)\right]$ при $x \to x_0$ ($C \neq 0$ - константа); другими словами, $P(x)$ одного порядка с $(x - x_0)^k$ при $x \to x_0$. Далее,

$$P(x) = a_n x^n \left[1 + o(1)\right] \text{ при } x \to \infty .$$

ПРИМЕР 9. Пусть

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

- ещё один многочлен степени m. Рассмотрим рациональную дробь $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Если x_0 - корень кратности k для $P(x)$ и кратности l для $Q(x)$, то

$$f(x) = C(x - x_0)^{k-l} \left[1 + o(1)\right] \text{ при } x \to x_0,$$

где $C \neq 0$ - константа. Далее,

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \left[1 + o(1)\right] \quad \text{при } x \to \infty .$$

Приведём ещё одну серию примеров, показывающих эффективность применения соотношений (9) при вычислении пределов самых различных типов.

ПРИМЕР 10. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}} \tag{10}$$

Здесь переменная x стремится к 3, а не к 0, как во всех соотношениях (9). Поэтому введём новую переменную $y=x-3\to 0$. Выражая в (10) x через y, видим, что вычислению подлежит предел $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{y+16}-2\sqrt{y+4}}{\sqrt[3]{y^2+6y}}$. Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Используем последнее соотношение (9), преобразовывая соответствующим образом радикалы:

$$\sqrt{y+16}=4\left(1+\frac{y}{16}\right)^{1/2}=4\left(1+\frac{y}{32}+o(y)\right),$$

$$\sqrt{y+4}=2\left(1+\frac{y}{4}\right)^{1/2}=2\left(1+\frac{y}{8}+o(y)\right),$$

$$\sqrt[3]{y^2+6y}=(6y)^{1/3}\left(1+\frac{y}{6}\right)^{1/3}=\left(1+\frac{y}{18}+o(y)\right).$$

Подставляя эти результаты в искомый предел, имеем после упрощений:

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{3}{32}y+o(y)}{8\sqrt[3]{6}y^{1/3}+y^{1/3}}=-\frac{3}{8\sqrt[3]{6}}\lim_{y\to 0}\frac{y^{2/3}+o\left(y^{2/3}\right)}{1+o(1)}=0.$$

ПРИМЕР 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Снова имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Аналогично предыдущему примеру, вводим новую переменную $y=x-\pi\to 0$. Имеем

$$\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{\cos\left(3y+{}^{3\pi}\!/_{2}\right)-\sin\left(y+\pi\right)}{\operatorname{tg}^2\left(2y+2\pi\right)}=\frac{\sin 3y-\sin y}{\operatorname{tg}^2 2y}=\frac{\sin 3y-\sin y}{\sin^2 2y}\cdot\cos^2 2y$$

Запишем синусы и косинус в соответствии с первой формулой (9). Вычисляем искомый предел:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(3y+o(y)\right)-\left(y+o(y)\right)}{\left(2y+o(y)\right)^2}\cdot\left(1+o(1)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\left(2y+o(y)\right)\left(1+o(1)\right)}{4y^2+o\left(y^2\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2y+o(y)}{4y^2+o\left(y^2\right)}=\infty$$

ПРИМЕР 12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(x^2/\pi\right)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

Имеем неопределённость того же типа, что и выше, применяем ту же замену переменной $y=x-\pi\to 0$.

$$\frac{\sin\left(x^2/\pi\right)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}=\frac{\sin\dfrac{(y+\pi)^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin(y+\pi)+1}}-2}=\frac{\sin\left(\pi+2y+{}^{y^2}\!/_{\pi}\right)}{2^{\sqrt{1-\sin y}}-2}=\frac{-\sin\left(2y+{}^{y^2}\!/_{\pi}\right)}{2^{\sqrt{1-(y+o(y))}}-2}=$$

$$=-\frac{2y+o(y)}{2^{1-{}^{y}\!/_{2}+o(y)}-2}=\frac{-y+o(y)}{2\left(2^{-{}^{y}\!/_{2}+o(y)}-1\right)}=\frac{-y+o(y)}{2\left[e^{\ln 2\left(-{}^{y}\!/_{2}+o(y)\right)}-1\right]}$$

Используем четвёртую формулу (9), приводим полученное выражение к виду

$$\frac{-y+o(y)}{2\left(e^{-{}^{y\ln 2}\!/_{2}+o(y)}-1\right)}=\frac{-y+o(y)}{2\left(1-\dfrac{y\ln 2}{2}+o(y)-1\right)}\to\frac{1}{\ln 2}$$ при $y\to 0$, т.е. при $x\to\pi$.

ПРИМЕР 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

После предыдущих примеров здесь можно обойтись без пояснений:

$$\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}=\frac{e^{3x\ln 2}-e^{5x\ln 3}}{7x-2x+o(x)}=\frac{\left(1+3x\ln 2+o(x)\right)-\left(1+5x\ln 3+o(x)\right)}{5x+o(x)}=$$
$$=\frac{\left(3\ln 2-5\ln 3\right)x+o(x)}{5x+o(x)}\to\frac{1}{5}\ln\frac{2^3}{3^5}.$$

ПРИМЕР 14. Вычислить предел функции $\dfrac{e^x-e}{\sin\left(x^2-1\right)}$ при $x\to 1$.

Делаем замену $y=x-1$, после чего функция принимает вид

$$\frac{e^{1+y}-e}{\sin\left(2y+y^2\right)}=\frac{e\left(y+o(y)\right)}{\sin\left(2y+o(y)\right)}=\frac{e\left(y+o(y)\right)}{2y+o(y)}=\frac{e\left(1+o(y)\right)}{2+o(1)}\to\frac{e}{2}.$$

Теоретические вопросы к главе 1.

1. Дать определения последовательности и числовой последовательности.
2. Дать определения числовой последовательности, ограниченной сверху, ограниченной снизу.
3. Дать определения сходящейся числовой последовательности. Привести примеры.
4. Сформулировать и доказать теорему о единственности предела числовой последовательности.
5. Сформулировать и доказать теорему об ограниченности числовой последовательности, имеющей предел.
6. Что можно сказать о сходимости арифметической прогрессии? Обосновать ответ.
7. Что можно сказать о сходимости геоиетрической прогрессии? Обосновать ответ.
8. Сформулировать и доказать теорему о связи операции перехода к пределу с арифметическими операциями.
9. Сформулировать и доказать теорему о переходе к пределу в неравенствах для числовых последовательностей.

10. Сформулировать признак Вейерштрасса существования предела числовой последовательности.
11. Доказать сходимость числовой последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
12. Что такое натуральный логарифм?
13. Что такое бесконечно малая последовательность?
14. Записать утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ с помощью понятия бесконечно малой.
15. Что такое бесконечно большая последовательность?
16. Дать определение ограниченности функции $f(x)$ при $x \to x_0$. То же для ограниченности сверху или снизу.
17. Дать определение предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ «на языке $\varepsilon - \delta$» и «на языке последовательностей».
18. Дать определение бесконечно малой и бесконечно большой при $x \to x_0$ функции.
19. Для случая функции $f(x)$ сформулировать теоремы о единственности предела; ограниченности функции, имеющей предел; пределе суммы, произведения и отношения; переходе к пределу в неравенствах; «о полицейских».
20. Дать определение непрерывности функции в точке.
21. Что можно сказать о непрерывности многочлена, о непрерывности рациональной дроби?
22. Доказать соотношение (первый замечательный предел): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
23. Дать определение ограниченности и определение предела функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$; при $x \to x_0 + 0$.
24. Переформулировать теоремы вопроса 19 применительно к односторонним пределам функции в точке.
25. Дать определение непрерывности функции в точке слева или справа.

26. Какова связь между пределом функции в точке и односторонними пределами этой функции в той же точке?

27. Каковы варианты поведения рациональной функции в окрестности фиксированной точки? Ответ обосновать.

28. Дать определение ограниченности функции $f(x)$ при $x \to +\infty$; при $x \to -\infty$; при $x \to \infty$.

29. Дать определение предела функции $f(x)$ в направлениях из вопроса 28.

30. Верны ли теоремы из вопроса 19 для пределов из вопроса 28?

31. Каковы варианты поведения многочлена при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$. Ответ обосновать.

32. Тот же вопрос для рациональной дроби.

33. Сформулировать теоремы о непрерывности суммы, произведения и отношения функций и о линейности свойства непрерывности функций.

34. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности сложной функции.

35. Сформулировать теорему о функции, обратной к строго монотонной.

36. Доказать соотношения (второй замечательный предел):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e.$$

37. Дать определения гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$. Указать их области определения, исследовать чётность.

38. Доказать основные тождества для гиперболических функций, аналогичные тригонометрическим тождествам.

39. Сформулировать определение изолированной точки разрыва и дать классификацию таких точек.

40. Сформулировть теорему о функции, непрерывной на замкнутом интервале. Показать на примерах существенность каждого условия теоремы.

41. Сформулировать алгоритм реализации приближённого «вилки» решения уравнений вида $f(x) = 0$.

42. Что означает запись $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$?

43. Что означает фраза «$f(x)$ и $g(x)$ – одного порядка малости при $x \to x_0$?

44. Дать определение асимптотической эквивалентности функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$.

45. Показать, что при $x \to 0$ справедливы утверждения

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^a \sim ax$$

46. Что означает запись $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$?

47. Что такое “главный член асимптотики $f(x)$ при $x \to x_0$” ?

Задачи к главе 1.

1. Доказать, что последовательность $x_n = n^2$ расходится, пользуясь определением предела.
2. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Показать, что:

   а) из того, что $x_n < y_n$, начиная с некоторого номера, не вытекает, что $x < y$.

   б) из того, что $x \le y$, не вытекает, что $x_n \le y_n$, начиная с некоторого номера.
3. Является ли ограниченная последовательность бесконечно большой? Дать аргументированный ответ.

В следующих задачах доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, воспользовавшись определением предела (найти $N(\varepsilon)$):

4. $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$, $a = \dfrac{3}{5}$

5. $x_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$

6. $x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}$

7. $x_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \dfrac{1}{2}$

8. $x_n = \dfrac{1+3n}{5-n}, \quad a = -3$

9. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}$

10. $x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}$

11. $x_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2$

В следующих задачах вычислить пределы числовых последовательностей:

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$

Вычислить пределы числовых последовательностей:

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^2+2}}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$

Вычислить пределы числовых последовательностей:

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right]$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n(n-1)}\right]$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{n^3-1}\right]$ 29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right]$

Вычислить пределы числовых последовательностей:

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{n-n^2+3}$ 31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+...+(5n-3)}$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{9}{64}+...+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$ 33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+5+9+13+...+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right]$ 35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$

Доказать следующие утверждения, пользуясь определением предела функции (найти $\delta(\varepsilon)$).

36. $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13$ 37. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10$

38. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}=-\dfrac{5}{3}$ 39. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}=-8$

40. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}=8$ 41. $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}=40$

В следующих задачах доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$).

42. $f(x)=-2x^2-4,\quad x_0=3$ 43. $f(x)=-3x^2-5,\quad x_0=-2$

44. $f(x)=-4x^2-6,\quad x_0=1$ 45. $f(x)=-5x^2-7,\quad x_0=1$

46. $f(x)=-2x^2+9,\quad x_0=4$ 47. $f(x)=5x^2+5,\quad x_0=8$

В следующих задачах вычислить пределы функций:

48. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$ 49. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

50. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$ 51. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

52. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}$

Вычислить пределы функций:

54. $\lim\limits_{x\to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{(1/4)+x}-\sqrt{2x}}$

55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$

57. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$

58. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$

59. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

Доказать, что при $x \to a$ справедливы соотношения:

60. $o\big(o\big(f(x)\big)\big)=o\big(f(x)\big)$

61. $O\big(o\big(f(x)\big)\big)=o\big(f(x)\big)$

62. $o\big(O\big(f(x)\big)\big)=o\big(f(x)\big)$

63. $O\big(O\big(f(x)\big)\big)=O\big(f(x)\big)$

64. $O\big(f(x)\big)+o\big(f(x)\big)=O\big(f(x)\big)$

65. $O\big(f(x)\big)\cdot o\big(f(x)\big)=o\big(f(x)\big)$

66. Доказать, что $\operatorname{sh} x = x + o(x)$.

67. Доказать формулу $\operatorname{ch} x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 \dfrac{x}{2}$ и получить из нее соотношение

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Найти главный член асимптотики:

а) … вида Cx^n при $x \to 0$ для функций:

68. $2x-3x^3+x^5$

69. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

б) вида $C(x-1)^n$ при $x \to 1$ для функций:

70. x^3-3x+2

71. $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

в) … вида Cx^n при $x \to +\infty$ для функций:

72. $x^2+100x+1000$

73. $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$

74. $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$

75. $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

г) … вида $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ при $x\to+\infty$ для функций:

76. $\frac{x+1}{x^4+1}$ 77. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 78. $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

д) … вида $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ при $x\to1$ для функций:

79. $\frac{x^2}{x^2-4}$ 80. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 81. $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

Вычислить пределы функций:

82. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$ 83. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$

84. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\sin\left(\pi(x/2+1)\right)}$ 85. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$

86. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$ 87. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$

Вычислить пределы функций:

88. $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$ 89. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$

90. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$ 91. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

92. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$ 93. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

Вычислить пределы функций:

94. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2^{x+7}}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$ 95. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$

96. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$ 97. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}}$

98. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$

99. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

Вычислить пределы функций:

100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg} x^3}$

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$

102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$

103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x-7x}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg} x}$

Вычислить пределы функций:

106. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^2}$

107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

108. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$

109. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

110. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$

111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^{x}}\right)}$

Вычислить пределы функций:

112. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

113. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$

114. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

115. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{x^2}$

117. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x\cos 2x}{1+\operatorname{tg} 2x\cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Вычислить пределы функций:

118. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{\frac{3}{x+3}}$ 119. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$

120. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$ 121. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x}\right)^{x+2}$

122. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x+6}}$ 123. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\frac{e^x-1}{x}}$

Вычислить пределы функций:

124. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$ 125. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$

126. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$ 127. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

128. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$ 129. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg} x}}$

Вычислить пределы функций:

130. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$ 131. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin \pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$

132. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x}}$ 133. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

134. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\cos \pi x\right)^{\operatorname{tg}(x-2)}$ 135. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin(\pi x/4)}$

Вычислить пределы функций:

136. $\lim\limits_{x\to 0}\ln[(e^{x^2}-\cos x)\cos(1/x)+\operatorname{tg}(x+(\pi/3))]$

137. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x + \ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^x}$

138. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos 2\pi x}{2 + (e^{\sqrt{x-1}} - 1) \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x+2}{x-1}}$

139. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1)\cos(1/x) + 4\cos x}$